非线性理论数学基础

姚妙新 陈芳启 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

序　　言

现代自然科学和技术的飞速发展,对工科博士生的培养提出了更高的要求,他们应当具备相当好的现代数学修养和学习研究一些非线性的前沿的或跨学科的科学理论的能力.

为满足非数学专业博士生数学教学的需要,根据课程教学大纲的要求和近几年博士生的具体情况,我们在总结多年教学经验的基础上,精心编写了这本将提高现代数学修养和学习非线性理论的基础知识这两个目的有机结合的教材.

本教材共分为四部分:第一部分(第 1 章)为现代分析数学基础,主要包括抽象空间的拓扑结构、代数结构和测度结构以及线性泛函分析的基本知识,除包含学习本课程所必需的预备知识外,也为博士生进一步的后继学习和研究提供了一些必要的基本知识.已经有相当基础的学生可以跳过这一部分;第二部分(第 2 章和第 3 章)是非线性泛函分析和现代变分理论的基础知识,其中重点介绍了有很多应用的非线性映射的两种微分和隐函数定理;第三部分(第 4 章至第 6 章)为非线性动力系统的基础知识,主要包括分岔和混沌的基本理论,也重点介绍了研究分岔的奇异性理论;最后一部分仅用一章介绍了分形理论的基础知识.

本教材的特点是:针对非数学专业博士生已有的数学基础和学习本课程的目的,选材精当;注重相关概念或理论之间的联系;着重介绍一些非线性理论的基本知识和现代数学的重要理论和方法,而略去一些较艰深的数学证明,但仍保持较严谨的数学体系.

编写本教材时,除参考了国内外的有关书籍和文献外,还参考引用了陈志敏教授和朱大新教授多年前编写的有关讲义.作为天津大学研究生数学教学负责人之一的曾绍标教授积极支持和参加了编写工作,天津大学研究生院的领导和培养处的有关同志以及南开大学－天津大学刘徽应用数学中心的熊洪允教授对本教材的编写和修改都给予了很大的支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢.

由于本教材仍处于建设和改革的过程中,加之时间仓促,其中定会有不妥甚至错误之处,诚恳希望使用本教材的教师和博士生提出宝贵的意见,以便在教学中和重印时加以修正.

应用本教材时,建议教师根据各专业方向工科博士生的具体情况、课时安排和实际需要,选讲部分章节并配置一些习题,其余一些章节可作为学生自修研读的内容.

编者

2005 年 2 月于天津大学

目　　录

第 1 章　空间结构与映射

1.1　映射与势

集合之间的联系通过映射来实现,映射概念在数学中是基本的.本节简述映射的基本内容,并通过它定义集合的势,然后阐明可数集与不可数集的概念.

定义 1.1.1　设 A 和 B 是两个集合, $A,B\neq\varnothing$.如果按照某个确定的法则 f,使得 $\forall x\in A$,在 B 中都有唯一确定的元素 y 与 x 对应,则称 f 是一个从 A 到 B 的映射,记为 $f:A\to B$. y 称为 x 在 f 下的像,记为 $y=f(x)$. 集 A 称为 f 的定义域,记为 $\mathscr{D}(f)$. 集 $\{y\in B:\exists x\in A \text{ s.t. } f(x)=y\}$ 称为 f 的值域,记为 $\mathscr{R}(f)$.

这里,"$\forall$"表示"任一","$\exists$"表示"存在","s.t."表示"使得","$\varnothing$"表示空集.

定义 1.1.2　两个映射 f_1,f_2 称为相等的,如果它们都是从 A 到 B 的映射,且对每个 $x\in A$ 有 $f_1(x)=f_2(x)$.从 A 到 B 的一个映射 f 称为单射,若对每个 $y\in B$,至多只有一个 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$.单射也称为一一的映射.从 A 到 B 的一个映射 f 称为满射,若对每个 $y\in B$,都有至少一个 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$. 满射也称为映上的映射或覃射. 若 $f:A\to B$ 既是单射又是满射,则称 f 是 A 与 B 之间的一个一一对应或双射.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个映射, $A\subset X$, $B\subset Y$.我们用记号 $f(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 分别表示集合 $\{y\in Y:\exists x\in A \text{ s.t. } f(x)=y\}$ 和 $\{x\in X:f(x)\in B\}$,并分别称它们为 A 在 f 下的像集和 B 在 f 下的原像集.

若 $f:X\to Y$ 为映射,且 $A\subset X$,那么把 A 中元素按法则 f 对应到 Y 中元素,就得到一个 A 到 Y 的映射 f_1,当然 f_1 在 A 上的作用与 f 是一样的,我们称 f_1 为 f 在 A 上的限制,记为 $f|_A:A\to Y$.当 $A\subset B$ 且映射 $f:A\to C$ 是 $g:B\to C$ 在 A 上的限制时,我们也称映射 g 是映射 f 在 B 上的一个延拓或扩张.

若 $f:X\to X$ 为映射,且对所有 $x\in X$ 有 $f(x)=x$,就称 f 是 X 上的恒等映射或单位映射.集 X 上的恒等映射可记为 i_X 或 Id_X,有时也简记为 I.

若 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 为映射,令 $h(x)=g(f(x))$, $\forall x\in X$,则 h 是从 X 到 Z 的映射,称为 f 与 g 的复合映射,记为 $h=g\circ f$ 或 $h=gf$.

容易证明下述定理.

定理 1.1.1　设 $f:X\to Y$ 为一个映射,则

(1) f 为单射 $\Leftrightarrow$ 存在映射 $g:Y\to X$,使 $gf=Id_X$;

(2) f 为满射 $\Leftrightarrow$ 存在映射 $h:Y\to X$,使 $fh=Id_Y$;

(3) f 为一一对应 $\Leftrightarrow$ 存在映射 $f^{-1}:Y\to X$,使 $f^{-1}f=Id_X$ 且 $ff^{-1}=Id_Y$.

我们将上述定理中的映射 f^{-1} 称为一一对应 $f:X\to Y$ 的逆映射. 注意逆映射记号 f^{-1} 与原像集记号中 f^{-1} 的不同含义.

利用映射的概念可将两个集合的并与交的运算推广.设有一个从集合 Λ 到基本集 X 的映射 f,则 $\forall \alpha\in\Lambda$,有 X 的唯一确定的子集 $A_\alpha=f(\alpha)$ 与之对应.我们称 $\{A_\alpha;\alpha\in\Lambda\}$ 为以 Λ 为指标集的一个集族,并分别定义这个集族的并与交为

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x\in X;\exists\alpha\in\Lambda,\text{s.t. }x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x\in X;\forall\alpha\in\Lambda,x\in A_\alpha\}.$$

在 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$ 或 $\Lambda=\mathbf{N}$ 的情形,$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 可分别写作 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$,$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 可分别写作 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$.

定理 1.1.2 设 $f:X\to Y$ 为映射,$A,B,A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 都是 X 的子集,则有

(1) $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$;

(2) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$,一般地,有 $f(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha)$;

(3) $f(A\cap B)\subset(f(A)\cap f(B))$,一般地,有 $f(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha)$.

定理 1.1.3 设 $f:X\to Y$ 为映射,$A\subset X$,而 $C,D,C_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 都是 Y 的子集,则有

(1) $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$;

(2) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$,一般地,有 $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}C_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(C_\alpha)$;

(3) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$,一般地,有 $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}C_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(C_\alpha)$;

(4) $f^{-1}(C-D)=f^{-1}(C)-f^{-1}(D)$;

(5) $f^{-1}(C^{C})=[f^{-1}(C)]^{C}$,其中,$C^{C}=Y-C$,$[f^{-1}(C)]^{C}=X-f^{-1}(C)$;

(6) $A\subset f^{-1}[f(A)]$;

(7) $f(f^{-1}(C))\subset C$.

对于一个集合,最基本的问题之一是它含有多少个元素.在集元素有限情况下,把它们数出来就行了,这实际上是把集合的元素与某个集合 $\{1,2,\cdots,n\}(n\in\mathbf{N})$ 的元素一一对应起来(这里 $\mathbf{N}$ 为正整数集).由此启发我们定出一个衡量任意集合含元素"多少"的方法.

定义 1.1.3 设 A,B 是两个集合.若 A,B 都是空集,或者 A,B 非空且存在从 A 到 B 上的一个一一对应 $f:A\to B$,则称 A 与 B 是对等的或等势的集合,记为 $A\sim B$,$|A|=|B|$,或者 $\overline{A}=\overline{B}$.其中 $\overline{A}$ 或 $|A|$ 表示集 A 的势或基数,它是一切与 A 对等的集合共有的一个特性.又若 A 与 B 的某个子集对等,则称 A 的势小于或等于 B 的势,记为 $\overline{A}\leqslant\overline{B}$ 或 $\overline{B}\geqslant\overline{A}$;而若 A 与 B 的某个子集对等但不能与 B 本身对等,则称 A 的势小于 B 的势,记为 $\overline{A}<\overline{B}$ 或 $\overline{B}>\overline{A}$.

显然,集合之间的对等关系满足:

(1) 自反性:$A\sim A$,

(2) 对称性:若 $A\sim B$,则 $B\sim A$,

(3) 传递性:若 $A\sim B$, $B\sim C$,则 $A\sim C$,

因此它是一种等价关系.确切地说,它是以一些集合为元素的任一集合上的一个等价关系.

注 在现代数学里,集合 X,Y 的积集 $X\times Y$ 定义为全体由 X 中元素 a 和 Y 中元素 b 组成的有序对 (a,b)(定义为集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$)所形成的集合,而集合 X 上的一个等价关系 R 定义为积集 $X\times X=\{(a,b):a,b\in X\}$ 的满足下列条件的一个子集:

(1) $\forall a\in X,(a,a)\in R$;

(2) $\forall a,b\in X,(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R$;

(3) $\forall a,b,c\in X,\{(a,b),(b,c)\}\subset R\Rightarrow(a,c)\in R$.

当且仅当$(a,b)\in R$,可写 aRb,并可称 a 等价于b. 此外,元素 $a\in X$ 的等价类,记为$[a]$,定义为集合$\{x\in X:(x,a)\in R\}$.同时,全体等价类形成的集合$\{[a]:a\in X\}$称为 X(对于等价关系 R)的商集,记为 X/R .在一些特定的场合,例如,两个实数的差是整数时定为是等价的,可记相应的商集为 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$,又如,两个实数的差是一正数 T 的整数倍时定为是等价的,可记相应的商集为 $\mathbf{R}/T$,参见 6.1.

对于一个集合 A,若存在 $n\in\mathbf{N}$,使得 A 与$\{1,2,\cdots,n\}$的一个子集对等,则称其为有限集,否则称其为无限集.有限集的势就是其所含元素的个数,空集的势就是数 0,于是势的概念就是有限集元素个数概念的推广,它反映出一切相互对等的集所共有的特性.我们称无限集的势为超穷数,下述定理是超穷数大小比较的基础.

定理 1.1.4(F. Bernstein)　设 A,B 为两个集合,若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$,且 $\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{B}}$,则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证明　不妨假设 $A\cap B=\varnothing$.由条件存在 $f:A\to B$ 和$g:B\to A$ 两个单射,现任取一个 $a\in A$,则 a 在g 下的原像在B 中可能不存在(此时称 a 是无前辈的),也可能是唯一的一个元素 b(此时称 b 为a 的前辈).同样可考虑每个 $b\in B$ 在f 下的原像.对 A 中元素a 可用这种方法追寻它的各代"前辈",则或者到某个 A 中无前辈的元a_0 处停止(此时称 a_0 为 a 的祖宗),或者到 B 中某个无前辈的元b_0 处停止(此时称 b_0 为 a 的祖宗),或者这种追寻过程没有尽头(此时称 a 无祖宗).

依此定义下列集合:

$A_1=\{a\in A:a$ 在A 中有祖宗$\}$;

$B_1=\{b\in B:b$ 在A 中有祖宗$\}$;

$A_2=\{a\in A:a$ 在B 中有祖宗$\}$;

$B_2=\{b\in B:b$ 在B 中有祖宗$\}$;

$A_3=\{a\in A:a$ 无祖宗$\}$;

$B_3=\{b\in B:b$ 无祖宗$\}$,

则这些集合互不相交,且 $f|_{A_1}$,$f|_{A_3}$和 $g|_{B_2}$分别是 A_1 与 B_1,A_3 与 B_3,B_2 与 A_2 之间的一一对应.定义 $h:A\to B$ 为

$$h(a)=\begin{cases} f(a), & a\in A_1\cup A_3,\\ g^{-1}(a), & a\in A_2,\end{cases}$$

则 h 是一一对应,故得 $A\sim B$,即 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.证毕.

定义 1.1.4　凡能与正整数集 $\mathbf{N}$ 的一个子集对等之集合均称为可列集或可数集.可数无限集的势记为$\aleph_0$.

注　在有些文献中,所谓"可列集"相当于这里的可数无限集,所谓"至多可列集"则相当于这里的可数集.

显然,可数集的任一子集也是可数集.

由于 $\mathbf{N}$ 的元素可以排成一个无穷序列,故立即可得下述结果.

定理 1.1.5 集合 A 是可数集$\Leftrightarrow$集合 A 的全部元素可以排进一个无穷序列.

关于无穷序列的数学定义可参见定义 1.2.8 前面关于点列的叙述.

此定理在证明一些集合是可数集时很有用.

定理 1.1.6 设 $A_n(n=1,2,\cdots)$都是可数无限集,令

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

则 S 是可数无限集.

证明 由于 S 包含可数无限集 A_1,故 S 是无限集.又设

$$A_n=\{a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nk},\cdots\},n=1,2,\cdots.$$

考虑无限阵列:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}\rightarrow & a_{12} & a_{13}\rightarrow & a_{14}\ \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\ \cdots \\ \downarrow & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\ \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\ \cdots \\ \downarrow & & & \\ \cdots & & & \end{array}$$

这个阵列含有 S 的全部元素,而这些元素可按箭头所指出的顺序排成一无穷序列:

$$a_{11},a_{12},a_{21},a_{31},a_{22},a_{13},a_{14},a_{23},a_{32},a_{41},\cdots,$$

因此 S 是可数集.证毕.

由此定理不难获得下述推论.

推论 1.1.1 设 A 是可数集,且对每个 $\alpha\in A$,A_α 是可数集. 若 $T=\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha$,则 T 是可数集.

推论 1.1.2 全体有理数之集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证明 用 $\mathbf{Q}^+$,$\mathbf{Q}^-$ 分别表示正、负有理数集,则

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^+\cup\mathbf{Q}^-\cup\{0\}.$$

令 $A_i=\left\{\frac{1}{i},\frac{2}{i},\frac{3}{i},\cdots\right\}$,则 A_i 是可数集,$i=1,2,\cdots$. 于是 $\mathbf{Q}^+=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 是可数集.同理可证 $\mathbf{Q}^-$ 是可数集.所以 $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^+\cup\mathbf{Q}^-\cup\{0\}$是可数集.证毕.

下面的定理表明$\aleph_0$是超穷数中最小的.

定理 1.1.7 任一无限集 M 包含一个可数无限子集.

证明 由于 $M\neq\varnothing$,可从 M 中取一元素记为a_1,因为 M 是无限集,故 $M-\{a_1\}\neq\varnothing$,于是在 $M-\{a_1\}$中又可取一元素 a_2,显然 $a_2\neq a_1$,这样进行下去,设已取出 M 中互不相同的 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,由于 M 是无限集,$M-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\neq\varnothing$,故可在 $M-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中取一元素 a_{n+1},它与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 皆不同,所以,由数学归纳法,我们得出一个由 M 中互异的元素作成的无穷序列:$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$, 显然,集$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$是 M 的可数无限子集.证毕.

注 本定理的这一证明是不严格的,严格的证明需要用到选择公理,在此从略.此后的某些定理也有类似情况,但我们不再一一注明.

定义 1.1.5 不是可数集的无限集称为无限不可数集或简称为不可数集.

定理 1.1.8　实数集 $\mathbf{R}$ 是一个不可数集.

证明　由于可数集的子集是可数集,我们只需证明 $\mathbf{R}$ 的子集 $[0, 1]$ 不是可数集就能得到 $\mathbf{R}$ 是不可数集的结论. 用反证法. 若无限集 $[0, 1]$ 是可数的,则存在一个从正整数集 $\mathbf{N}$ 到 $[0,1]$ 的一一对应 f,使

$$[0,1]=\{f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots\}.$$

设在十进制小数表示下,$f(i)=0.a_{i1}a_{i2}\cdots$, $i\in\mathbf{N}$ 其中 $a_{ij}\in\{0,1,\cdots,9\}$, $i,j\in\mathbf{N}$,则若取 $b_i\in(\{3,8\}-\{a_{ii}\})$, $i\in\mathbf{N}$,就使数 $B=0.b_1b_2\cdots$ 一方面在 $[0,1]$ 中,另一方面又不在 $\{f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots\}$ 中(数 B 在十进制表示中形式是唯一的,但对任 $i\in\mathbf{N}$,因 $b_i\neq a_{ii}$ 而有 $B\neq f(i)$),这是矛盾. 证毕.

由映射 $f:(0,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\tan\dfrac{(2x-1)\pi}{2}$ 是 $(0,1)$ 与 $\mathbf{R}$ 之间的一个一一对应,知 $(0,1)$ 与 $\mathbf{R}$ 等势. 再由 $(0,1)\subset[0,1]\subset\mathbf{R}$,应用定理 1.1.4,即得 $[0,1]$ 与 $\mathbf{R}$ 等势. 于是,若记 $\overline{\overline{\mathbf{R}}}=\aleph_c$,则据定理 1.1.8 可知 $\aleph_c>\aleph_0$.

利用实数的二进制表示还可证明 $\aleph_c$ 是 $\mathbf{N}$ 的幂集 $2^{\mathbf{N}}$ 的势. 这里,我们用 2^A 表示集 A 的幂集,即 A 的一切子集构成的集. A 的幂集也可记为 $\mathscr{P}(A)$.

下面的定理表明,不可能存在一个最大的势.

定理 1.1.9　设 A 是一个非空集合,则 $\overline{\overline{2^A}}>\overline{\overline{A}}$.

证明　显然,$A\sim\{\{a\}:a\in A\}\subset 2^A$,故只需证 A 与 2^A 不对等即可.

假设 $A\sim 2^A$,则存在 A 与 2^A 间的一个一一对应 φ,令 $B=\{a\in A: a\notin\varphi(a)\}\subset A$. 因 $B\in 2^A$,从而应有 $b\in A$ 使 $\varphi(b)=B$. 但这时,$b\in B$ 或 $b\notin B$ 都不能成立:

$$b\in B\Rightarrow b\in\varphi(b)\Rightarrow b\notin B,$$

$$b\notin B\Rightarrow b\notin\varphi(b)\Rightarrow b\in B.$$

这一矛盾说明 A 不能与 2^A 对等. 从而 $\overline{\overline{2^A}}>\overline{\overline{A}}$. 证毕.

是否存在势 β 使 $\aleph_0<\beta<\aleph_c$? 著名的连续统假设断言,这样的 β 不存在. 已经证明,这一假设对于现有的集合论公理系统是独立的.

1.2　距离空间与连续映射

在抽象的集合中引进距离(度量),主要目的在于刻画集合中元素的"任意逼近"概念,使集合本身成为带有某种结构的"空间",其元素可称为"点". 我们将讨论距离空间中具有各种性质的点集,也要讨论与处理"极限"问题紧密联系的映射的连续性概念.

定义 1.2.1　设 X 是一个非空集合. 如果一个映射 $d:X\times X\to\mathbf{R}$ 满足下列三个条件:

(1) $d(x,y)\geqslant 0$ 且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$,

(2) $d(x,y)=d(y,x)$,

(3) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,

其中 x,y,z 是 X 中任意元素,则称 d 为 X 上的一个度量或距离.

例 1.2.1　在集 $\mathbf{R}^n=\{x:x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), x_i\in\mathbf{R}, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 上定义函数

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|,$$

或

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

则 d_1,d_∞或 d 都是 $\mathbf{R}^n$ 上的距离,后者是通常的.

例 1.2.2 在$[a,b]$上定义的全体连续的实值(或有时考虑复值)函数所构成的集记为 $C[a,b]$.若定义

$$d(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|,\forall x,y\in C[a,b],$$

则 d 是 $C[a,b]$上的距离,因为 d 显然满足定义1.2.1中的条件(1)(2),而且

$$\begin{aligned}d(x,z)&=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-z(t)|\\&\leq\max_{a\leq t\leq b}\{|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\}\\&\leq\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leq t\leq b}|y(t)-z(t)|\\&=d(x,y)+d(y,z),\end{aligned}$$

故 d 也满足条件(3).

定义 1.2.2 如果在非空集合 X 上定义了一个距离$d:X\times X\to\mathbf{R}$,则 X 与d 一起,称为一个度量空间或距离空间,记作(X,d)或简记为 X. X 中元素和子集分别称为(X,d)中的点(或元素)和子集.

例 1.2.3 集 $C[a,b]$按例 1.2.2 中定义的距离 d 成为一个距离空间,常简记为 $C[a,b]$.今定义

$$\rho(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t,\forall x,y\in C[a,b],$$

则$(C[a,b],\rho)$也是一个距离空间.

例 1.2.4 设 X 是任一非空集合,对任意的 $x,y\in X$,定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\1, & x\neq y,\end{cases}$$

则易验证(X,d)是一个距离空间,称之为离散距离空间.

设 A 是距离空间(X,d)的非空子集,则 d 在$A\times A$ 上的限制显然是A 上的一个距离.因此$(A,d|_{A\times A})$也是一个距离空间,称之为(X,d)的一个子空间,简记为(A,d)或 A.

从已知的距离空间引出新的距离空间,除作为子空间外,还可作为积空间.设(X_1,d_1)和(X_2,d_2)是两个距离空间,令 $X=X_1\times X_2$,且令

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=([d_1(x_1,y_1)]^2+[d_2(x_2,y_2)]^2)^{\frac{1}{2}},\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X,$$

则易验证(X,d)是一个距离空间,称为(X_1,d_1)和(X_2,d_2)的积空间,记作

$$(X_1,d_1)\times(X_2,d_2),\text{或 }X_1\times X_2.$$

上述空间的乘积可以推广到多于两个空间的情形.这样,$\mathbf{R}^n(n\geq2)$可以理解为 n 个 $\mathbf{R}$ 的乘积.此外,常把 $\mathbf{R}$ 写为 $\mathbf{R}^1$.

定义 1.2.3 如果距离空间(X_1,d_1)与(X_2,d_2)之间存在一个一一对应 f,使得

$$d_1(x,y)=d_2(f(x),f(y)),\forall x,y\in X_1.$$

则称 f 是从 (X_1,d_1) 到 (X_2,d_2) 上的等距映射，并称这两个距离空间是等距同构的.

开集、闭集、闭包和收敛点列是距离空间中的四个重要的基本概念，我们在邻域的基础上给出它们的定义.

定义 1.2.4　设 x_0 是距离空间 (X,d) 中一点，ε 是一正数，则集

$$B(x_0;\varepsilon)=\{x\in X:d(x,x_0)<\varepsilon\}$$

称为以 x_0 为中心、以 ε 为半径的开球，也称为点 x_0 在 (X,d) 中的 ε 邻域或一个邻域；集

$$\widetilde{B}(x_0;\varepsilon)=\{x\in X:d(x,x_0)\leqslant\varepsilon\}$$

称为以 x_0 为中心、以 ε 为半径的闭球.

"球"这个词来源于通常的三维空间 $\mathbf{R}^3$. 在一般的距离空间中，它不一定再具有球的外形了.

注　在距离空间 (X,d) 中的子集 A 也常称为某点 $x_0\in X$ 的一个邻域，若存在 $\varepsilon>0$ 使 $B(x_0;\varepsilon)\subset A$.

例 1.2.5　在 $C[a,b]$ 按例 1.2.2 定义距离所成的距离空间中，若用 θ 表示 $[a,b]$ 上恒等于零的函数，则 $B(\theta;1)$ 是所有图像在 $[a,b]$ 上严格含于以横轴为中心线、宽度为 2 的矩形区域里的连续函数的全体.

例 1.2.6　在离散距离空间 X 中，如果 $\varepsilon\in(0,1]$，则 $B(x_0;\varepsilon)=\{x_0\}$；而如果 $\varepsilon>1$，则 $B(x_0;\varepsilon)$ 是整个空间 X.

定义 1.2.5　设 A 是 (X,d) 的一个子集，若 $x\in A$ 且存在一邻域 $B(x;\varepsilon)\subset A$，则称 x 为 A 的一个内点. 若 $x\in A^C$，且存在一邻域 $B(x;\varepsilon)\subset A^C$，则称 x 为 A 的一个外点. 若 $x\in X$ 既非 A 的内点也非 A 的外点，则称 x 为 A 的一个边界点. A 的内点全体称为 A 的内部，记为 A^o. A 的外点全体称为 A 的外部，记为 A^e. A 的边界点全体称为 A 的边界，记为 A^b.

显然，对任一 $A\subset(X,d)$，$X=A^o\cup A^e\cup A^b$.

定义 1.2.6　设 A 是 (X,d) 是一个子集，若 $A=A^o$，即对任一 $x\in A$ 存在 $B(x;\varepsilon)\subset A(\varepsilon>0)$，则称 A 为 (X,d) 中的一个开集；若 $A^C=X-A$ 是 (X,d) 中的开集，则称 A 为 (X,d) 中的一个闭集.

容易证明，距离空间中的任一开球 $B(x;\varepsilon)$（闭球 $\widetilde{B}(x;\varepsilon)$）都是开集（闭集），这反映了它们的名称中用字"开（闭）"的合理性.

例 1.2.7　在 $\mathbf{R}^1$ 中，设 $a,b\in\mathbf{R}$ 满足 $a<b$，则开区间 (a,b) 是开集，闭区间 $[a,b]$ 是闭集，而 $[a,b)$ 既不是开集也不是闭集.

例 1.2.8　若 (X,d) 中集 X 是有限集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}(n\in\mathbf{N})$，令 ε 适合

$$0<\varepsilon<\min_{1\leqslant i,j\leqslant n}d(x_i,x_j),$$

则 $B(x_i;\varepsilon)=\{x_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$，由此不难得出 X 中任一子集既是开集又是闭集.

定理 1.2.1　(X,d) 中开集具有下列三性质：

(1) X 与 $\varnothing$ 是开集；

(2) A 与 B 是开集 $\Rightarrow A\cap B$ 是开集；

(3) $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 都是开集 $\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 是开集.

证明　(1) 由邻域及内点定义可知，X 中每一点都是 X 的内点，故 X 是开集. 空集的内部是空集，故空集也是开集.

(2)若 $A\cap B=\varnothing$，由(1)知其为开集.若 $A\cap B\neq\varnothing$，因 A 与 B 是开集，故对任一 $x\in A\cap B$，存在 $B(x;\varepsilon_1)\subset A$，$B(x,\varepsilon_2)\subset B$，于是取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，就有 $B(x;\varepsilon)\subset A$，$B(x;\varepsilon)\subset B$，故 $B(x;\varepsilon)\subset A\cap B$，从而 x 是 $A\cap B$ 的内点.所以 $A\cap B$ 是开集.

(3)对任一 $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使 $x\in A_{\lambda_0}$.又因 A_{λ_0} 是开集，存在 $B(x;\varepsilon)\subset A_{\lambda_0}$，从而 $B(x;\varepsilon)\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，故 x 是 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 的内点.所以 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 是开集.

根据定义 1.2.6，并利用 De Morgan 公式容易得出如下定理.

定理 1.2.2　(X,d)中的闭集具有下列三性质：

(1)X 与 $\varnothing$ 是闭集；

(2)A 与 B 是闭集$\Rightarrow A\cup B$ 是闭集；

(3)$A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$都是闭集$\Rightarrow\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 是闭集.

定义 1.2.7　设 A 是(X,d)的一个子集，$x\in X$.如果 $\forall\varepsilon>0$，$B(x;\varepsilon)\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$，则称 x 为 A 的一个聚点.A 的全体聚点所成集合称为 A 的导集，记为 A^d.并集 $A\cup A^d$ 称为 A 的闭包，记为 $\bar{A}$.$A-A^d$ 中的点称为 A 的孤立点.若 A 是无孤立点的闭集，则称 A 为一个完全集.

对于(X,d)中两个子集 A 与 B，若 $\bar{A}\supset B$，我们称 A 在 B 中稠密.特别，若 $A\subset(X,d)$在 X 中稠密，则称 A 是 X 的一个稠子集.另一方面，当 $\bar{A}$ 的内部是空集时，称 A 是(X,d)中的疏子集，或说 A 是无处稠密的或是疏朗的.

显然，有理数集 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 的稠子集；$A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$是 $\mathbf{R}^1$ 的疏子集，它有一个唯一的聚点 $0\notin A$.

下面的例子给出一个著名的疏朗的完全集.

例 1.2.9　Cantor 三分集 A_0 的构造过程如下：将闭区间$[0,1]$用分点$\frac{1}{3},\frac{2}{3}$三等分，删去中间的开区间 $G_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，剩下两个闭区间 $I_0=\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$I_1\left[\frac{2}{3},1\right]$，其长度均为$\frac{1}{3}$；把剩下的两个闭区间分别再三等分，再分别删去中间的开区间：$G_1^{(2)}=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$G_2^{(2)}=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$，剩下四个闭区间：$I_{00}=\left[0,\frac{1}{9}\right]$，$I_{01}=\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]$，$I_{11}=\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]$，$I_{10}=\left[\frac{8}{9},1\right]$.其长度均为$\frac{1}{3^2}$，如此继续进行下去，在第 n 次三等分时删去 2^{n-1} 个开区间（称为第 n 级区间）是：$G_1^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right)$，$G_2^{(n)}=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right)$，$\cdots$，$G_{2^{n-1}}^{(n)}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$，剩下的 2^n 个闭区间 $I_{00\cdots0}$，$\cdots$，$I_{11\cdots1}$ 的长度均为$\frac{1}{3^n}$，$n=1,2,\cdots$.这样便得到所谓 Cantor 三分集 A_0 与 Cantor 开集 G_0（所有被删去的开区间之并）：

$$G_0=G_1^{(1)}\cup G_1^{(2)}\cup G_2^{(2)}\cup\cdots\cup G_1^{(n)}\cup G_2^{(n)}\cup\cdots\cup G_{2^{n-1}}^{(n)}\cup\cdots,$$

$$A_0=[0,1]-G_0=[0,1]\cap G_0^C.$$

Cantor 三分集 A_0 有如下性质：

(1)A_0 是完全集.因为 A_0 是闭集，只需再证 A_0 不含孤立点，即 $A_0\subset A_0^d$.由 A_0 的定义

知,在第 n 次删去 2^{n-1} 个开区间后,剩下的 2^n 个闭区间的长度均为$\frac{1}{3^n}$, $n=1,2,\cdots$,记这 2^n 个闭区间为 $I_{s_1s_2\cdots s_n}$($s_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\cdots,n$),于是 $\forall x\in A_0$, $\varepsilon>0$,总有正整数 N 存在,使$\frac{1}{3^N}<\varepsilon$,且 $x\in$ 某个 $I_{s_1s_2\cdots s_N}$,从而 $I_{s_1s_2\cdots s_N}\subset B(x;\varepsilon)$.因闭区间 $I_{s_1s_2\cdots s_N}$ 的两个端点都是属于 A_0 的点,因此 $(B(x;\varepsilon)-\{x\})\cap A_0\neq\varnothing$,即 $x\in A_0^d$.这说明 $A_0\subset A_0^d$.

(2)A_0 是疏朗集.因 $A_0=\overline{A}_0$ 不能包含任何内点(否则,有某个 $x\in A_0$ 及一个正数 $\varepsilon>0$,使得 $B(x;\varepsilon)\subset A_0$,但如(1)中所得,$x\in$ 某个 $I_{s_1s_2\cdots s_N}$ 而 $I_{s_1s_2\cdots s_N}\subset B(x;\varepsilon)$, $I_{s_1s_2\cdots s_N}$ 中间的占三分之一长度的开区间含于 G_0,故有 $B(x;\varepsilon)\cap G_0\neq\varnothing$,此与 $B(x;\varepsilon)\subset A_0$ 矛盾!),所以 A_0 是疏朗集.

由(1)、(2)知,Cantor 三分集 A_0 是 $\mathbf{R}^1$ 中疏朗的完全集.

容易证明下述定理.

定理 1.2.3 设 A 是 (X,d) 的一个子集,则

(1)$\overline{A}=A\cup A^b$;

(2)$\overline{A}$ 是闭集;

(3)A 是闭集 $\Leftrightarrow A=\overline{A}$.

定理 1.2.4 (X,d) 中闭包具有下列四性质:

(1)$\overline{\varnothing}=\varnothing$;

(2)$A\subset\overline{A}$;

(3)$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;

(4)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

集 X 中的一个无穷点列(或称无穷序列,简称点列或序列)就是一个从 $\mathbf{N}$ 到 X 的映射.通俗地说,若 $f:\mathbf{N}\to X$ 是映射,则称

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$$

为 X 中一个点列,常记作 $\{x_n\}_{n\geqslant1}$ 或 $\{x_n\}$,其中 $x_n=f(n)$, $n=1,2,\cdots$.

定义 1.2.8 设 $\{x_n\}_{n\geqslant1}$ 是 (X,d) 中一个点列,$x_0\in X$.若 $n\to\infty$ 时有 $d(x_n,x_0)\to0$,则称 x_0 为 $\{x_n\}_{n\geqslant1}$ 的一个极限点,或称 $\{x_n\}_{n\geqslant1}$ 收敛到点 x_0,记为 $x_n\to x_0(n\to\infty)$,或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

容易证明,距离空间中收敛点列的极限点是唯一的.

定理 1.2.5 (X,d) 的子集 A 以 x_0 为聚点 $\Leftrightarrow$ 存在一个收敛于 x_0 的由 $A-\{x_0\}$ 中不同点组成的点列.

定义 1.2.9 (X,d) 中子集 A 称为是有界的,如果存在某个开球 $B(x_0;\varepsilon)$,使得

$$A\subset B(x_0;\varepsilon).$$

易证在 (X,d) 中,集 A 有界 $\Leftrightarrow\operatorname{diam}A<+\infty$.这里 $\operatorname{diam}A$ 称为 A 的直径,定义为

$$\operatorname{diam}A=\begin{cases}\sup\{d(x,y):x,y\in A\}, & \text{当 } A\neq\varnothing,\\ 0, & \text{当 } A=\varnothing.\end{cases}$$

显然,若点列 $\{x_n\}_{n\geqslant1}$ 收敛,则集 $\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$ 是有界的,反之不一定成立.

下面,我们把数学分析中连续函数的概念推广到距离空间上.

定义 1.2.10 设 X,Y 是两个距离空间,$f:x\to Y$ 是映射,点 $x_0\in X$.如果对 $f(x_0)$ 在 Y

中任一给定的邻域$B(f(x_0);\varepsilon)(\varepsilon>0)$,存在 x_0 在 X 中一个邻域$B(x_0;\delta)(\delta>0)$,使得

$$f(B(x_0;\delta))\subset B(f(x_0);\varepsilon),$$

则称 f 在点 x_0 连续.若 f 在 X 中每一点连续,则称 $f:X\to Y$ 为连续映射.

我们略去证明而指出下述结论.

定理 1.2.6 设(X,d_1),(Y,d_2)是两个距离空间.对于映射 $f:X\to Y$,下列五个条件两两等价:

(1)f 是连续映射;

(2)Y 中的每一开集在 f 下的原像都是 X 中的开集;

(3)Y 中的每一闭集在 f 下的原像都是 X 中的闭集;

(4)$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$, $\forall A\subset X$;

(5)若 X 中点列$\{x_n\}_{n\geqslant1}$收敛于点 $x\in X$,则在 Y 中点列$\{f(x_n)\}_{n\geqslant1}$收敛于点 $f(x)$.

定义 1.2.11 设 f 是从距离空间 X 到距离空间 Y 的映射,$\Omega\subset X$.称 f 在 Ω 上连续,若 f 在 Ω 中每点连续;称 f 在 Ω 上一致连续,若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使得只要 $x_1,x_2\in\Omega$ 满足 $d(x_1,x_2)<\delta$ 时,就有 $d(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

在实数集里,一个点列是收敛的当且仅当点列是 Cauchy 序列,这实际上反映了实数的完备性,现在把有关概念推广到距离空间上来.

定义 1.2.12 称(X,d)中一点列$\{x_n\}_{n\geqslant1}$为一个 Cauchy 序列,如果$\forall\varepsilon>0$, $\exists n_\varepsilon\in\mathbf{N}$,使得

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,\ \forall n,m\geqslant n_\varepsilon.$$

若(X,d)的子集 M 中的每一 Cauchy 序列都收敛于 M 中的点,则称 M 是完备的;当(X,d)本身是完备的,则称(X,d)为完备的距离空间.

显然,空间 $\mathbf{R}^n$ 是完备的.任何离散空间也是完备的.非完备空间在应用上往往不方便,例如在这种空间中,方程可能无解.存在确定的方法能使非完备的距离空间完备化,方法的实质是把所有的 Cauchy 序列作为新的元素增加到原空间中去.

在完备的距离空间中,我们有下述重要的不动点原理.

定理 1.2.7(Banach 压缩映射不动点原理) 设(X,d)是完备的距离空间,$f:X\to X$ 是 X 上一个压缩映射,即存在一个常数 $\alpha\in[0,1)$(称为 f 的压缩比或压缩率),使得

$$d(f(x),f(y))\leqslant\alpha d(x,y),\ \forall x,y\in X,$$

则存在唯一的点 $\bar{x}\in X$,使得 $f(\bar{x})=\bar{x}$.称 $\bar{x}$ 为 f 的不动点.

证明 先证存在性.任取一点 $x_0\in X$,不妨假设由递推关系式

$$x_{n+1}=f(x_n),\ n=0,1,2,\cdots$$

产生一个无穷点列$\{x_n\}_{n\geqslant0}$.重复运用映射的压缩性及距离的三角不等式性质,得到

$$\begin{aligned}
d(x_{n+p},x_n)&=d(f(x_{n+p-1}),f(x_{n-1}))\\
&\leqslant\alpha d(x_{n+p-1},x_{n-1})\\
&\leqslant\alpha^2 d(x_{n+p-2},x_{n-2})\\
&\leqslant\cdots\\
&\leqslant\alpha^n d(x_p,x_0)\\
&\leqslant\alpha^n[d(x_p,x_{p-1})+d(x_{p-1},x_{p-2})+\cdots+d(x_1,x_0)]
\end{aligned}$$

$$\leqslant \alpha^n(\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}+\cdots+\alpha+1)d(x_1,x_0)$$
$$\leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0),$$

因 $\alpha\in[0,1)$,故有 $d(x_{n+p},x_n)\to 0(n\to\infty)$,即 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 是 Cauchy 序列. 因 (X,d) 完备,这个序列收敛于一点 $\bar{x}\in X$. 于是从

$$d(\bar{x},f(\bar{x}))\leqslant d(\bar{x},x_n)+d(f(x_{n-1}),f(\bar{x}))$$
$$\leqslant d(\bar{x},x_n)+\alpha d(x_{n-1},\bar{x})$$
$$\to 0(n\to\infty),$$

得出 $d(\bar{x},f(\bar{x}))=0$,即 $f(\bar{x})=\bar{x}$.

再证唯一性. 如果还有 $x^*\in X$ 使 $f(x^*)=x^*$,则

$$d(\bar{x},x^*)=d(f(\bar{x}),f(x^*))\leqslant\alpha d(\bar{x},x^*),$$

从而有 $d(\bar{x},x^*)=0$,即 $\bar{x}=x^*$. 证毕.

由证明过程看出,从空间中任何一点开始,通过映射的相继作用,像点终将趋于不动点.

连续函数在有限闭区间上有一些很好的性质,例如有界和达到最大值和最小值等等,为考虑连续映射在距离空间子集上相应的性质,我们需要紧集的概念.

定义 1.2.13 设 A 是 (X,d) 中一个子集,如果 A 中任一无穷点列都有一子列收敛于 X 中一点,则称 A 是列紧的. 如果收敛子列的极限点都属于 A,则称 A 是自列紧的. 若 (X,d) 本身是列紧的,则称之为列紧空间.

显然,距离空间中有限子集总是列紧的. 列紧的空间一定是完备的,但反之不一定成立.

定理 1.2.8 若 A 是 (X,d) 的自列紧子集,则 A 是有界闭集.

证明 若 A 是空集,则 A 是有界闭集. 现设 A 非空. 若 A 是无界集,则易证 A 必含一个每两点距离都大于一固定正数的无穷点列,这个点列没有收敛子列,因而与 A 的列紧性矛盾,因此 A 必有界. 再证 A 是闭集,这只需证 $\bar{A}\subset A$. 现若 A 无聚点,则 A 是闭集. 若 $a\in\bar{A}$ 是 A 的聚点,则从定理 1.2.5 知 $A-\{a\}$ 中存在以 a 为极限点的收敛点列,于是由 A 的自列紧性得出 $a\in A$. 总之 $\bar{A}\subset A$. 证毕.

由此定理易见,列紧集必是有界的. 然而有界集不必是列紧的,例如,开区间 $(0,1)$ 本身作为距离空间,它是一个有界闭集,但不是列紧集. 显然,列紧空间中的闭子集一定是自列紧的.

此外,我们不加证明地给出下面两个定理.

定理 1.2.9 在完备的距离空间中,集 A 是列紧的,当且仅当 A 是完全有界的(即对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 A 的一个有限 ε 网).

注 这里 A 的一个有限 ε 网是指空间中有限个元素 $y_1,y_2,\cdots,y_m$,使得 $A\subset\bigcup_{i=1}^{m}B(y_i;\varepsilon)$.

定理 1.2.10 在距离空间中,集 A 是自列紧的,当且仅当 A 是紧的.

其中"紧"的定义如下,它是用"覆盖"而不是用"点列"来描述的.

定义 1.2.14 设 A 是 (X,d) 的一个子集. 如果 $\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的一族开集,使得 $A\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$,则称此开集族为 A 的一个开覆盖;仅包含有限个开集的开覆盖称为有限开覆盖. 如果 A 的一个开覆盖的子族仍是 A 的一个开覆盖,则称之为原开覆盖的一个子覆盖. 若 A 的任一开覆盖都有一个有限子覆盖,则称 A 为 X 中的紧集. 若 (X,d) 本身是紧的,则 X 称为紧空间.

现在可以用下述定理给出一般列紧距离空间上连续映射的几个基本特征,证明从略.

定理 1.2.11 设 $f:X\to Y$ 是从列紧距离空间 X 到距离空间 Y 的连续映射,则

(1) $f(X)$ 是 Y 的紧集;

(2)当 $Y=\mathbf{R}^1$ 时,f 有界且能在 X 中的点上达到最大值和最小值;

(3) f 是一致连续映射,即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得只要 $d_1(x,y)<\delta$,就有 $d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$,这里 d_1,d_2 分别表示 X,Y 上的距离函数.

下面就最常见的函数空间 $C[a,b]$ 给出判别列紧子集的条件,它对物理问题中的积分方程和微分方程的研究是有用的.

定义 1.2.15 设 A 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数集,如果有一常数 $M>0$,使得

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant M,\ \forall f\in A,$$

则称 A 是一致有界的.如果对任何 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得只要 $|x_1-x_2|<\delta,x_1,x_2\in[a,b]$,就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,\ \forall f\in A,$$

则称 A 是等度连续的.

定理 1.2.12(Arzela-Ascoli) 函数集 $A\subset C[a,b]$ 列紧的充分必要条件为 A 是一致有界且等度连续的.

证明从略,可参见刘斯铁尔尼克与索伯列夫著《泛函数分析概要》第 64 页.

1.3 勒贝格积分与测度

勒贝格积分理论发展了黎曼积分理论,拓广了可积函数类,也大大减弱了对积分与极限换序的限制条件,从而有更广泛的应用范围.

勒贝格积分的基本思想是,舍弃黎曼积分定义中对函数 f 定义域进行分划的方案,改成分划包含 f 的值域的一个区间,函数值属于同一子区间的所有的点 x 构成区间 $[a,b]$ 的一个子集,不一定具有区间的形式,而 $[a,b]$ 成为若干这种子集的并集.于是在每个这种子集上函数值都相差很小,可用其中任一点函数值乘以子集的"长度",再求和,并用和式的极限作为积分值.

为了实现这种想法,需要研究和解决的一个问题是必须把区间的长度概念推广到相当一般的数集上(把这些存在"长度"的数集称为可测集),另一个问题就是要求函数 f 具有下述性质:对任何实数 c,d,集 $E(c<f\leqslant d)=\{x\in[a,b]:c<f(x)\leqslant d\}$ 是可测集.称这种函数为可测函数,我们将对可测函数建立勒贝格积分,还要讨论可测函数的种种性质.

这里,我们从实数空间 $\mathbf{R}$ 中开集的构造出发,介绍 $\mathbf{R}$ 中可测集和 $\mathbf{R}$ 上可测函数以及勒贝格积分的基本概念,再介绍一般测度的概念.

容易证明,在距离空间中任一开集是开球的并集.而在 $\mathbf{R}$ 中的一个开球就是某个开区间.

设 G 是 $\mathbf{R}$ 中任一非空有界开集,则对于任一 $x\in G$,存在开区间 (a_x,b_x),使 $x\in(a_x,b_x)\subset G$.将所有这种含 x 的开区间 (a_x,b_x) 的并集记作 U_x,则 $U_x\subset G$,且 U_x 是端点不再属于 G 的开区间.

定义 1.3.1 设有界开集 $G\subset\mathbf{R}$ 包含开区间 (α,β),而端点 $\alpha,\beta\notin G,\alpha<\beta$,则称 (α,β) 是 G 的一个构成区间.

我们不难证得下述定理，它给出了 **R** 中开集的构造.

定理 1.3.1　设 G 是 **R** 中非空有界开集，则 G 可唯一地表示为可数个互不相交的构成区间之并，即 $G=\bigcup_{k=1}^{m}(\alpha_k,\beta_k)$，其中 m 为一正整数或∞，且对每个 k，有 $\alpha_k,\beta_k\notin G$.

对于 **R** 中无界开集，上述定理的结论本质上也是正确的，只是要允许 α 或 β 被 $-\infty$ 或 $+\infty$ 代替.

这样，对于 **R** 中任一开集 G，它的可数个构成区间长度之和是一个非负广义实数值，且唯一地确定，我们把它记为 $|G|$ 或 μG，称它为 G 的测度.

这里对广义实数略作介绍：称 $\hat{\mathbf{R}}=(-\infty,+\infty)\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ 为广义实数集. 规定 $\pm\infty$ 与实数 $x(-\infty<x<+\infty)$ 的代数运算如下.

(1)加法：$x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$.

(2)减法：$x-(\mp\infty)=(\pm\infty)-x=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$.

(3)乘法：$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty$；$(\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty$；

$$x(\pm\infty)=(\pm\infty)x=\begin{cases}\pm\infty, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ \mp\infty, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

(4)除法：$\dfrac{x}{\pm\infty}=0$，$\dfrac{\pm\infty}{x}=\begin{cases}\pm\infty, & \text{当 } x>0,\\ \mp\infty, & \text{当 } x<0.\end{cases}$

注意运算式 $(\pm\infty)+(\mp\infty)$，$(\pm\infty)-(\pm\infty)$，$\dfrac{\pm\infty}{0}$，$\dfrac{x}{0}$，$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$，$\dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$ 等都是没有意义的.

最初人们希望在 **R** 上能建立这样一种测度 μ，它能满足如下的要求：

(1)对 **R** 中每一子集 E，E 的测度 μE 是一个广义实数值；

(2)测度 μ 是区间长度概念的推广，即若 I 是某个区间，比方说 $[a,b]$ 或 (a,b)，$a<b$，则 $\mu I=b-a$；

(3)测度 μ 具有可数可加性，即若 $\{E_n\}$ 是 **R** 中一列互不相交的子集，每个 E_n 有测度 μE_n，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 也有测度，且 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n$；

(4)测度 μ 具有平移不变性，即若 $E\subset\mathbf{R}$ 有测度 μE，对于任一取定的 $y\in\mathbf{R}$，令 $E+y=\{x+y:x\in E\}$，则 $\mu(E+y)=\mu E$.

但后来人们发现 **R** 上测度 μ 同时满足上述四个条件是不可能实现的，因此只保留后三个条件，这样得出的测度就是下面所要介绍的勒贝格测度. 它的定义可从外测度概念出发.

定义 1.3.2　设 $E\subset\mathbf{R}$，对于每个覆盖 E 的开集 G，以 $|G|$ 记它的可数个构成区间长度之和，则下确界

$$\inf\{|G|:G\text{ 是 }\mathbf{R}\text{ 中开集且 }G\supset E\}$$

存在，称之为 E 的外测度，记为 μ^*E.

外测度 μ^* 是区间长度概念的推广，优点在于对 **R** 中任一子集 E，μ^*E 都有意义，但是已经证明它并不满足可数可加性. 因此人们在它的基础上建立一个具有可数可加性的测度，方法是按照一定的条件选出 **R** 中"相当多"的子集，并把它们的外测度定义成它们的测度.

一种条件是集的外测度等于所谓内测度. 设 $F\subset\mathbf{R}$ 是一个有界闭集，取 $M>0$ 使得 $F\subset(-M,M)$，即可定义 F 的测度为 $|F|=2M-|(-M,M)-F|$. 对于 $E\subset\mathbf{R}$，把上确界

$\sup\{|F|: F$ 是 $\mathbf{R}$ 中有界闭集且 $F\subset E\}$

定义为 E 的内测度，记为 $\mu_* E$. 人们定义满足条件 $\mu^* E=\mu_* E$ 的集 $E\subset\mathbf{R}$ 为勒贝格可测集，并称 $\mu^* E(=\mu_* E)$ 为 E 的勒贝格测度，记作 μE 或 $\mu(E)$.

这个定义虽较直观，但在一些理论研究中不大好用，人们研究得出与之等价的下述定义.

定义 1.3.3 设 $E\subset\mathbf{R}$，若对于任意的 $T\subset\mathbf{R}$，皆有

$$\mu^* T=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E^{C}),$$

则称 E 是勒贝格可测集，简称 L 可测集或可测集. 当 E 为 L 可测集时，称 $\mu^* E$ 为 E 的勒贝格测度(简称 L 测度或测度)，记为 μE 或 $\mu(E)$.

这个定义虽然不大直观，但经深入研究，可知这样定义的测度对于 $\mathbf{R}$ 中"相当多"的子集有意义且满足前述要求(2)~(4).

如果把由开集出发通过取补集或取可数个集合的并或交所能得出的集合统称为 Borel 集，那么可以证明：$\mathbf{R}$ 中的 Borel 集都是 L 可测的，并且任一 L 可测集可以表示成一个 Borel 集与一个零测度集的并.

另外可证：$\mathbf{R}$ 中全体 L 可测集形成的集族对于取补集、取可数并或可数交等运算是封闭的.

上述定义 $\mathbf{R}$ 上勒贝格测度的方法可以推广到 $\mathbf{R}^n$ 上去. 称 $(\mathbf{R}^n,\mathscr{L}^n,\mu^n)$(也可写作 $(\mathbf{R}^n,\mathscr{L},\mu)$)为 n 维勒贝格测度空间，其中 $\mathscr{L}^n$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中全体 L 可测集，μ^n 表示 $\mathbf{R}^n$ 上 L 测度.

一般的测度空间是如下定义的.

定义 1.3.4 设 X 是一个非空集合，Σ 是 X 的一些子集组成的集族，若 Σ 具有如下性质：

(1) $X\in\Sigma$；

(2)若 $A\in\Sigma$ 则 $A^{C}\in\Sigma$；

(3)若 $A_n\in\Sigma$，$n=1,2,\cdots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\Sigma$，

则称 Σ 是 X 上的一个 σ 代数或 Borel 体.

又设 μ 是定义在 X 上 σ 代数 Σ 上的一个非负广义实值函数，如果 μ 具有如下性质：

(1) $\mu(\varnothing)=0$；

(2)对任何 $E_i\in\Sigma$，$i=1,2,\cdots$，只要 $E_i\cap E_j=\varnothing$，$i\neq j$，就有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\quad\text{(可数可加性)},$$

则称 μ 为 Σ 上的一个测度，而 X,Σ 与 μ 一起称为一个测度空间，记为 (X,Σ,μ).

由定义不难证明一般测度的下述基本性质.

定理 1.3.2 测度空间 (X,Σ,μ) 的测度 μ 具有如下性质：

(1)单调性：若 $E_1,E_2\in\Sigma$，且 $E_1\subset E_2$，则 $\mu(E_1)\leqslant\mu(E_2)$；

(2)次可数可加性：若 $E_i\in\Sigma$，$i=1,2,\cdots$，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i);$$

(3)若 $E_i\in\Sigma$，$i=1,2,\cdots$，且 $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\lim_{i\to\infty}\mu(E_i);$$

(4)若 $E_i\in\Sigma$，$i=1,2,\cdots$，且 $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$，则

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i).$$

现在可说明什么叫L可测函数了.

定义1.3.5 设f是一维勒贝格测度空间$(\mathbf{R},\mathscr{L},\mu)$中某个集合$E\in\mathscr{L}$上定义的广义实值函数,如果$f$满足

$$E(f\geqslant c)\equiv\{x\in E: f(x)\geqslant c\}\in\mathscr{L}, \forall c\in\mathbf{R},$$

即对一切实数c,集$E(f\geqslant c)$都是L可测的,则称f是E上的一个勒贝格可测函数(简称L可测函数或可测函数).

可以证明,下面几个条件是等价的,因此,每一个都可作为可测函数的定义:

(1)$E(f\geqslant c)\equiv\{x\in E: f(x)\geqslant c\}\in\mathscr{L}, \quad \forall c\in\mathbf{R}.$

(2)$E(f> c)\equiv\{x\in E: f(x)> c\}\in\mathscr{L}, \quad \forall c\in\mathbf{R}.$

(3)$E(f\leqslant c)\equiv\{x\in E: f(x)\leqslant c\}\in\mathscr{L}, \quad \forall c\in\mathbf{R}.$

(4)$E(f< c)\equiv\{x\in E: f(x)< c\}\in\mathscr{L}, \quad \forall c\in\mathbf{R}.$

(5)$E(c<f\leqslant d)\equiv\{x\in E: c<f(x)\leqslant d\}\in\mathscr{L}, \quad \forall c,d\in\mathbf{R}.$

而上面的条件(5)恰好用于勒贝格积分的定义.

还可以证明,一个可测集上的可测函数类关于有限个函数的相加、相乘、取最大值和取最小值等运算都是封闭的.

下面介绍勒贝格积分的概念.

首先介绍有界可测函数在测度有限的可测集上的勒贝格积分.

定义1.3.6 设$E\in\mathscr{L}$,$\mu E<+\infty$,f是E上有界的L可测函数,$f(E)\subset[A,B]$.在$[A,B]$中任进行一分划D:

$$A=y_0<y_1<\cdots<y_n=B,$$

记$\delta(D)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_{i-1})$,$E_i=E(y_{i-1}<f\leqslant y_i)$,并任取$\eta_i\in(y_{i-1},y_i]$,$i=1,2,\cdots,n$,构成和式

$$S(D)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\mu E_i,$$

称$S(D)$为f在分划D下的和数.如果存在数J满足下述条件:对任何$\varepsilon>0$,有相应的$\sigma>0$,使得对任何分划D,只要$\delta(D)<\sigma$就成立

$$|S(D)-J|<\varepsilon,$$

则称f是E上的勒贝格可积函数,并称J是f在E上的L积分(勒贝格积分),记作

$$J=\lim_{\delta(D)\to 0}S(D)=(\mathrm{L})\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

其中的积分可简记作$\int_E f\mathrm{d}x$,$\int_E f\mathrm{d}\mu$或$\int_E f$.

当$E=[a,b]$时,$(\mathrm{L})\int_E f(x)\mathrm{d}x$也可记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu$等.

不难证明,定义中$[A,B]$的选取与f的可积性及积分无关,并且,在测度有限的可测集上,有界可测函数总是L可积的.

下面,我们将用上述定义建立一般可测函数在一般可测集上的勒贝格积分.

定义1.3.7 设$E\in\mathscr{L}$,f是E上非负的L可测函数,对$n=1,2,\cdots$,令$E_n=E\cap[-n,$

$n]$,定义函数$[f]_n:E_n\to\mathbf{R}$为

$$[f]_n(x)=\begin{cases}n, & 当 f(x)\geqslant n,\\ f(x), & 当 f(x)<n,\end{cases}$$

如果极限

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_{E_n}[f]_n\mathrm{d}x$$

为有限值,则称f在E上L可积,且f的L积分为

$$(\mathrm{L})\int_E f\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_{E_n}[f]_n\mathrm{d}x.$$

如果上述极限为$+\infty$,则称f在E上有L积分,L积分为$+\infty$,记作

$$(\mathrm{L})\int_E f\mathrm{d}x=+\infty.$$

若f是E上一般的L可测函数,则考虑其正部f^+和负部f^-,即

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & 若 f(x)\geqslant 0,\\ 0, & 若 f(x)<0,\end{cases}\quad f^-(x)=\begin{cases}0, & 若 f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & 若 f(x)<0.\end{cases}$$

如果f^+与f^-均在E上L可积,则称f在E上L可积,且f的L积分为

$$(\mathrm{L})\int_E f\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_E f^+\mathrm{d}x-(\mathrm{L})\int_E f^-\mathrm{d}x;$$

如果上式右端两个积分中仅有一个为$+\infty$,则称f在E上有L积分,且L积分分别为$+\infty$和$-\infty$.在f^+与f^-在E上均非L可积的情况下,f在E上的L积分无定义.

下面的定理表明了L积分是黎曼积分的一种推广,证明从略.

定理 1.3.3 设f是区间$[a,b]$上的黎曼可积函数,则f在$[a,b]$上L可积,且其L积分等于其黎曼积分.

现介绍记号$\mathrm{L}^p[a,b](p\geqslant 1)$的含义:

$$\mathrm{L}^p[a,b]=\{f:f 在[a,b]上\mathrm{L}可测,且(\mathrm{L})\int_a^b|f|^p\mathrm{d}x<+\infty\}.$$

它表示一个重要的距离空间,其中的元素是$[a,b]$上p方勒贝格可积的函数,当两个这样的函数仅在一个零测度集上取不同值(称为几乎处处相等)时,就把它们看成同一个元素.$\mathrm{L}^p[a,b]$中两个元素f和g之间的距离则规定为

$$d(f,g)=[(\mathrm{L})\int_b^a|f(t)-g(t)|^p\mathrm{d}t]^{\frac{1}{p}}.$$

容易证明$\mathrm{L}^p[a,b]$中的函数关于通常的加法和数乘两种运算是封闭的,因此$\mathrm{L}^p[a,b]$还成为一个线性空间,它将是后面所讨论的赋范线性空间的重要例子.

1.4 代数结构

在非空集合上架设了距离结构,就可以处理元素之间"任意逼近"一类的问题,有了测度结构,就可以处理子集的所谓体积问题及积分问题,而要处理元素之间的"运算"问题,则需要在集合上架设代数结构.现代数学可以说是研究这些结构及结构之间关系的数学.

在非空集合上架设的代数结构,就是下面定义中的代数运算.

定义 1.4.1 设 A,B 和 C 是集合. 一个从 $A\times B$ 到 C 的映射 $f:A\times B\to C$,称为一个 $A\times B$ 到 C 的代数运算,对于元素 $a\in A,b\in B$,称 $c=f(a,b)\in C$ 为它们的运算结果,记为 $a\circ b=c$,或 $ab=c$. 一个 $B\times A$ 到 A 的运算称为 A 上的一个外运算;一个 $A\times A$ 到 A 的运算称为 A 上的一个内运算,A 上的一个代数运算或 A 上的一个二元运算.

这里,运算符$\circ$用来表示代数运算 f,根据需要常改写为 + 或·等,并将运算分别称为加法或乘法等.

定义 1.4.2 设$\circ$是集合 A 上的一个二元运算,若 $\forall a,b,c\in A$,总有 $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$,则称这个代数运算满足结合律;若 $\forall a,b\in A$,总有 $a\circ b=b\circ a$,则称这个代数运算满足交换律;若$\oplus$是 A 上的另一个代数运算,$\forall a,b,c\in A$,总有 $a\circ(b\oplus c)=(a\circ b)\oplus(a\circ c)$($(a\oplus b)\circ c=(a\circ c)\oplus(b\circ c)$),则称代数运算$\circ$满足对代数运算$\oplus$的左(右)分配律.

群结构是一种最基本的代数结构,群的理论在其他数学领域和物理化学工程领域有广泛的应用. 历史上利用群论已解决了许多著名的困难问题,例如项链问题、分子结构计数问题、正多面体着色问题、开关线路计数问题、数字通信可靠性问题、代数方程求根问题以及几何作图问题等等.

定义 1.4.3 称一个非空集合 G 连同其上的一个二元代数运算$\circ$为一个半群,假如$\circ$满足结合律(以下将元素的运算结果 $a\circ b$ 写为 ab),若半群 G 还满足下述(1)与(2),则称 G 为一个群.

(1)在 G 中存在一个元 e,使得

$$ea=ae=a$$

对于 G 的任意元 a 都成立(称 e 为 G 的单位元);

(2)对于 G 的每一个元 a,在 G 中存在一个元 a^{-1},使得

$$a^{-1}a=aa^{-1}=e$$

成立(称 a^{-1} 为 a 的逆元).

若群 G 的二元运算还满足交换律,则称其为一个交换群或阿贝尔(Abel)群.

例 1.4.1 设 G 是全体整数的集合,G 对于普通加法成为一个群. 因为

(1)两个整数相加还是一个整数;

(2)$a+(b+c)=(a+b)+c$;

(3)数 $0\in G$,对于加法来说是单位元;

(4)对于任意整数 $n\in G$,有 $-n\in G$ 是 n 的逆元.

例 1.4.2 设 G 是所有不等于零的整数的集合,G 对于普通乘法不作成一个群. 因为,虽然

(1)两个整数相乘还是一个整数;

(2)$a(bc)=(ab)c$;

(3)数 $1\in G$,对于乘法来说是单位元;

但相应于(4)的逆元存在性不成立,例如整数 3 在 G 中就没有逆元.

例 1.4.3 $G=\{1,-1\}$,对于普通乘法构成一个交换群. 验证留给读者.

定义 1.4.4 群 G 的一个子集 H 称为 G 的一个子群,假如 H 对于群 G 的运算在 H 上的限制来说成为一个群.

容易证明,群 G 的一个子集 H 成为 G 的一个子群,当且仅当

$a,b\in H\Rightarrow ab^{-1}\in H.$

定义 1.4.5 一个非空集合 R 叫做一个环，假如 R 上有两个二元运算，常分别称作加法和乘法，且

(1) R 是一个加群，即 R 对于那个叫做加法的代数运算来说成为一个交换群；

(2) R 又是一个乘法半群，即 R 对于另一个叫做乘法的代数运算来说成为一个半群；

(3) 乘法对加法的左右两个分配律都成立，即

$$a(b+c)=ab+ac,$$

$$(b+c)a=ba+ca,$$

对 R 中任意三个元 a,b,c 都成立.

例 1.4.4 全体整数的集合对于普通加法和乘法作成一个环.

注 当群运算称为加法时，群的单位元常称为零元，而一个元的逆元常称为其负元.

对于既是加法群又是乘法半群的环来说，这两个术语很有必要. 下面定义中的单位元或逆元显然是就乘法而言的.

定义 1.4.6 环 R 的一个元 e 叫做单位元，假如对于 R 的任意元 a 都有

$$ea=ae=a.$$

一般地，一个环未必有单位元.

例 1.4.5 设 R 为全体偶数的集. R 关于普通加法和乘法显然作成一个环，但 R 没有单位元.

定义 1.4.7 含有单位元的一个环称为一个域，如果除了加法的零元外，每个元都具有逆元.

实数集 **R** 或复数集 **C** 关于数的加法和乘法显然都成为域，通称数域，我们将以 **K** 统一标记实数域 **R** 和复数域 **C**.

定义 1.4.8 环 R 叫做交换环，假如对于 R 中的任意两元 a,b 都有

$$ab=ba,$$

即乘法满足交换律.

定义 1.4.9 环 R 的一个子集 S 叫做一个子环，假如 S 本身关于 R 的两种代数运算成为一个环.

环 R 的子集 S 作成一个子环的条件显然是：对任何 $a,b\in S$，成立 $a-b\in S$ 和 $ab\in S$.

定义 1.4.10 环 R 的一个子环 S 叫做一个左(右)理想，是指对任意的 $a\in S, r\in R$，均有 $ra\in S\,(ar\in S)$. 既是左理想又是右理想的子环则称为一个理想.

定义 1.4.11 称交换环 R 的一个理想 S 可由子集 A 生成，是指 S 是包含 A 的最小理想，这时称 A 中的元素为 S 的生成元. 特别是当 S 可由有限集 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$ 生成时，称 S 是有限生成的，并记 $S=\langle r_1,r_2,\cdots,r_n\rangle$.

显然，

$$\langle r_1,r_2,\cdots,r_n\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i s_i \mid s_i\in R\right\}.$$

对于子集 $S_1,S_2\subset R$，记

$$S_1+S_2=\{r+s\mid r\in S_1, s\in S_2\},$$

$$S_1 \cdot S_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{k} r_i s_i \mid r_i \in S_1, s_i \in S_2 \right\}, \tag{1.4.1}$$

若 S_1 和 S_2 是理想,则易验证 $S_1 + S_2$ 和 $S_1 \cdot S_2$ 仍是理想,分别称为 S_1 与 S_2 的和理想与积理想.进而可归纳定义幂理想 $S^{k+1} = S^k \cdot S$.

定义 1.4.12　称环 R 的理想 M 是极大理想,是指 $M \neq R$ 且包含 M 的理想只有 M 和 R.

定义 1.4.13　设 R 是一个交换环,Y 是一个加法交换群.称 Y 是一个 R 模,若 Y 上还存在外运算 $R \times Y \to Y$,满足:$\forall a, a_i \in Y, r, r_i \in R, i = 1,2$,有

$$r(a_1 + a_2) = ra_1 + ra_2,$$

$$(r_1 + r_2)a = r_1 a + r_2 a,$$

$$(r_1 r_2)a = r_1(r_2 a),$$

且若 R 有单位元 e,则对任 $a \in Y$ 有 $ea = a$.

R 模 Y 的一个子集 Y_0 称为一个子模,若 Y_0 本身仍为一个 R 模.

对于 R 模 Y 的两个子模 Y_1, Y_2,类似于(1.4.1),记

$$Y_1 + Y_2 = \{a + b \mid a \in Y_1, b \in Y_2\},$$

则 $Y_1 + Y_2$ 仍为 Y 的子模,称为 Y_1 与 Y_2 的和.

称 R 模 Y 可由集合 $S \subset Y$ 生成,是指 $Y = R \cdot S$(参见式(1.4.1)),此时称 S 中的元素为 Y 的生成子;若 R 模 Y 可由有限集 $\{a_1, \cdots, a_k\} \subset Y$ 生成,则记 $Y = R\{a_1, \cdots, a_k\}$,并称 Y 是有限生成的.

定义 1.4.14　设 A 是一个 R 模,其中 R 是一个含单位元的环.如果 A 中有一个通常叫做乘法的内运算,满足结合律并使

(1) A 是一个环,

(2) 运算 $R \times A \to A$ 满足:$\forall r \in R, a, b \in A$ 有

$$r(ab) = (ra)b = a(rb),$$

则称 A 是一个代数.

绝大多数代数是带有乘法内运算的线性空间,线性空间也称向量空间,定义如下.

定义 1.4.15　环 R 上的一个模称为一个线性空间,若 R 还是域.

对于域,我们将只考虑实数域或复数域的情形,即 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$,从而由上述定义可得出下一节数域上的线性空间的定义(定义 1.5.2).

1.5　赋范线性空间与线性算子

本节要介绍的赋范线性空间将是一个重要而常用的在非空集合上代数结构与距离结构相互结合的典型例子.

定义 1.5.1　设 $\mathbf{K}$ 是某些复数的集合,其中包含 0 与 1,如果 $\mathbf{K}$ 中任意两个数(可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍是 $\mathbf{K}$ 中的数,则称 $\mathbf{K}$ 为一个数域.

实数集 $\mathbf{R}$ 和复数集 $\mathbf{C}$ 是数域的两个典型例子.有理数集也是数域,而整数集则不是.

定义 1.5.2　设 X 是非空集合,$\mathbf{K}$ 是数域,又设 $\varphi: X \times X \to X$ 和 $\Psi: \mathbf{K} \times X \to X$ 是两个映射,记

$$\varphi(x,y)=x+y,\Psi(a,x)=ax(\text{或 } a\cdot x),\forall x,y\in X,a\in\mathbf{K}.$$

若 φ,Ψ 分别满足

φ_1：$x+y=y+x,\forall x,y\in X$；

φ_2：$(x+y)+z=x+(y+z),\forall x,y,z\in X$；

φ_3：X 中存在一个元素，称为零元素，记作 θ(常仍记作 0)，使得 $x+\theta=x,\forall x\in X$；

φ_4：$\forall x\in X$，X 中存在一个唯一的元素，记作$(-x)$，称为 x 的负元素，使得

$x+(-x)=\theta$；

及

Ψ_1：$1x=x,\forall x\in X$；

Ψ_2：$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x),\forall x\in X,\alpha,\beta\in\mathbf{K}$；

Ψ_3：$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\forall x,y\in X,\alpha\in\mathbf{K}$；

Ψ_4：$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\forall x\in X,\alpha,\beta\in\mathbf{K}$,

则称 φ 是 X 的一个加法，Ψ 是 X 的在数域 $\mathbf{K}$ 上的一个数乘，加法和数乘一起统称为 X 在数域 $\mathbf{K}$ 上的线性运算或线性空间结构，称 X(按线性运算 φ 与 Ψ)为域 $\mathbf{K}$ 上的一个线性空间或向量空间，可以记作$(X;\mathbf{K};+,\cdot)$，或简记为 X，并称 X 中元素为向量.

当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时，分别称$(X;\mathbf{K};+,\cdot)$为实或复的线性空间或向量空间.

定义 1.5.3 设 M 是$(X;\mathbf{K};+,\cdot)$的一个非空子集，如果它对运算 + 与·是封闭的，即 $\forall x,y\in M,\alpha\in\mathbf{K}$，有 $x+y\in M$ 和 $\alpha x\in M$，则$(M;\mathbf{K};+,\cdot)$也是一个线性空间，称为线性空间 X 的一个线性子空间(简称子空间).

线性空间的维数概念建立在向量的线性无关概念的基础上.

定义 1.5.4 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性空间 X 中的 n 个向量，$n\in\mathbf{N}$. 如果存在不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{K}$，使得

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\theta,$$

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的；否则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的. X 中一组向量称为线性无关的，如果其中任意有限个向量是线性无关的.

定义 1.5.5 设 $M\subset(X;\mathbf{K};+,\cdot)$，则集

$$\operatorname{span} M=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i : x_i\in M,a_i\in\mathbf{K},1\leqslant i\leqslant n,n\in\mathbf{N}\right\}$$

是 X 的一个线性子空间，称为由 M 生成的子空间，或简称为 M 的张成.

定义 1.5.6 如果$(X;\mathbf{K};+,\cdot)$中存在一个含 n 个线性无关向量的组 $M=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，使得 $X=\operatorname{span} M$，则称 X 是 n 维的，并称 M 是 X 的一组基，这时记 $\dim X=n$，并且任一向量 x 可唯一地表示成 $x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$，其中复数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$由 $\mathbf{K}$ 中的数组成，称为 x 在基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的坐标. 如果 X 中存在线性无关的向量组，它含有无限多个成员，则称 X 是无限维的，并记为 $\dim X=+\infty$.

注意每个有限维的线性空间的维数是唯一的，但基不是唯一的. 定义在同一数域 $\mathbf{K}$ 上的由不同对象构成的各个线性空间之间有着本质上的联系. 由于关于向量的运算都可归结为相应的坐标的运算，故可得出一个重要的结论：数域 $\mathbf{K}$ 上任一个 n 维线性空间都与 $\mathbf{K}^n$ 是同构的. 同构的定义如下.

定义 1.5.7　设 X,Y 是数域 $\mathbf{K}$ 上两个线性空间，如果存在一个一一对应 $f:X\to Y$，使得

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y),\ \forall x,y\in X,\alpha,\beta\in\mathbf{K},$$

则称 X 与 Y 是同构的，f 称为一个同构映射.

不难得出，同构映射 f 具有下列基本性质：

(1) $f(\theta)=\theta, f(-x)=-f(x)$；

(2) X 中向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ Y 中向量 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 线性相关；

(3) 同构映射的逆映射及两个同构映射的复合映射仍是同构映射；

(4) 数域 $\mathbf{K}$ 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是两者有相同的维数.

定义 1.5.8　设 T 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间 X 到线性空间 Y 的映射，如果

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,\ \forall x,y\in X,\alpha,\beta\in\mathbf{K},$$

则称 T 是从线性空间 X 到线性空间 Y 的一个线性算子，可记 $T\in L(X,Y)$. 这里，$L(X,Y)$ 表示全体从线性空间 X 到线性空间 Y 的线性算子所成的集.

同构映射是线性算子的特例.

在下面定义的赋范线性空间上，距离概念是由“范数”导出的，而“范数”则是通常的向量(有向线段)长度概念的推广.

定义 1.5.9　设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，如果映射 $\|\cdot\|:X\to\mathbf{R}$ 满足下列条件：

(1) 正定性：　$\|x\|\geqslant 0,\ \forall x\in X$，当且仅当 $x=\theta$ 时 $\|x\|=0$,

(2) 正齐次性：　$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|,\ \forall x\in X,\alpha\in\mathbf{K}$,

(3) 三角不等式：　$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,\ \forall x,y\in X$,

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上一个范数.

X 与 $\|\cdot\|$ 一起称为一个赋范线性空间或赋范空间，记为 $(X,\|\cdot\|)$ 或简记为 X.

在赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中，对于任意的 $x,y\in X$，定义 $d(x,y)=\|x-y\|$，则易验证 d 是 X 上的一个距离，称其为由范数导出的距离. 于是，$(X,\|\cdot\|)$ 成为一个距离空间.

易见赋范线性空间 X 中以 x 为中心、以 r 为半径的开球为

$$B(x;r)=\{y\in X:\|x-y\|<r\}.$$

类似地，收敛序列或 Cauchy 序列的概念也可用范数概念描述，从而赋范线性空间也有完备性的问题.

定义 1.5.10　若赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 在范数导出的距离下成为完备的距离空间，则称之为一个 Banach 空间.

例 1.5.1　在 $\mathbf{R}^n$ (或 $\mathbf{C}^n$) 中，通常定义如下的范数：

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n(\text{或 }\mathbf{C}^n),$$

$\mathbf{R}^n$ (或 $\mathbf{C}^n$) 按此范数是 Banach 空间.

例 1.5.2　在 p 幂可和数列空间 l^p $(1\leqslant p<\infty)$ 中，通常定义如下的范数：

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall x=\{x_i\}_{i\geqslant 1}\in l^p,$$

l^p $(1\leqslant p<\infty)$ 按此范数是 Banach 空间. 这里，$\{x_i\}_{i\geqslant 1}\in l^p$ 表示 $\{x_i\}_{i\geqslant 1}$ 是满足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<+\infty$$

的数列，l^p 按照数列的加法和数乘构成线性空间.

例 1.5.3 对于有界数列空间 $l^\infty=\{x:x=\{x_i\}_{i\geq1}$是有界的数列$\}$，通常定义如下的范数

$$\|x\|=\sup_{i\geq1}\{|x_i|\},\ \forall x=\{x_i\}_{i\geq1}\in l^\infty,$$

按此范数 l^∞ 是 Banach 空间.

例 1.5.4 对于 $L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$，按照逐点的方式定义函数的线性运算：

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),(ax)(t)=ax(t),$$

则 $L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$成为线性空间，其中任两个几乎处处相等的函数看作同一元素.

再定义如下的范数

$$\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall x=x(t)\in L^p[a,b]\text{(其中的积分是勒贝格积分)},$$

则 $L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$按此范数成为 Banach 空间.

例 1.5.5 在 $C[a,b]$中，若定义如下的范数：

$$\|x\|_1=(L)\int_a^b|x(t)|\mathrm{d}t,\ \forall x\in C[a,b],$$

则$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$按此范数是一个不完备的赋范线性空间.

由范数的三角不等式性质，不难得出相应于“三角形两边之差小于第三边”的范数不等式：

$$|\|y\|-\|x\||\leqslant\|y-x\|.$$

这个不等式表明，范数这个映射在赋范线性空间上是连续的.

定义 1.5.11 设 T 是赋范线性空间X 到赋范线性空间Y 的线性算子，即 $T\in L(X,Y)$. 若存在常数 M，使得

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|,\ \forall x\in X,$$

则称 T 为从X 到 Y 的有界线性算子.

定义中用“有界”二字是由于下面一个明显的事实：$T:X\to Y$ 是有界线性算子，当且仅当 T 把X 中任一有界集映成 Y 中的有界集.

当 $T:X\to Y$ 是有界线性算子时，则显然数集

$$\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}:x\in X-\{\theta\}\right\}$$

的上确界存在，我们把该上确界作为算子 T 的范数.

定义 1.5.12 设 T 是赋范线性空间X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子，令

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

称$\|T\|$为算子 T 的范数(若 $X=\{\theta\}$，规定 T 的范数 $\|T\|=0$).

显然，当 T 是X 上有界线性算子时，有

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|,\ \forall x\in X,$$

并且易证

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}\|Tx\|=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leqslant1}}\|Tx\|.$$

记 $\mathscr{B}(X,Y)$为赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的全体有界线性算子所成集合，按通常定义的算子加法和数乘，它是一个线性空间，再按上述算子范数定义其上的范数$\|\cdot\|$，则容

易证明$(\mathscr{B}(X,Y),\|\cdot\|)$也是一个赋范线性空间,且当$Y$是Banach空间时,$\mathscr{B}(X,Y)$也是Banach空间.

通常把值域含于数域的映射称为泛函,因此我们引出下述定义.

定义1.5.13 设X是数域$\mathbf{K}$上的赋范线性空间,则视$\mathbf{K}=\mathbf{R}$(或$\mathbf{C}$),称$\mathscr{B}(X,\mathbf{K})$中元素为实(或复)有界线性泛函;并且称$\mathscr{B}(X,\mathbf{K})$为$X$的共轭空间或对偶空间,记为$X^*$.

由于数域$\mathbf{K}$的完备性,任何赋范线性空间X的共轭空间总是一个Banach空间.

从定义1.5.11立即得出,有界线性算子必是连续的.另一方面,当线性算子$T:X\to Y$是连续的,T必是有界的.因若不然,会对任一$n\in\mathbf{N}$,存在$x_n\in X$,使得

$$\|Tx_n\|>n\|x_n\|,x_n\neq\theta,$$

于是

$$\left\|T\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\|>1,n\in\mathbf{N},$$

若记

$$y_n=\frac{x_n}{n\|x_n\|},n\in\mathbf{N},$$

则$y_n\to\theta$但$Ty_n\not\to\theta$(因$\|Ty_n\|>1,n\in\mathbf{N}$),这与$T$的连续性矛盾,故得下述定理.

定理1.5.1 设X与Y是两个赋范线性空间,$T:X\to Y$是线性算子,则T是有界的,当且仅当T是连续的.

还容易证得线性算子$T:X\to Y$,在X中任一点$x_0\in X$处的连续性等价于T的(整体的)连续性.因此上述定理的结论中可添上:T是连续的,当且仅当T在某点$x_0\in X$处连续.

从上述结果容易推出:若$T\in\mathscr{B}(X,Y)$,则只要$x_n\to x$,就有$Tx_n\to Tx(n\to\infty)$.记

$$\mathscr{N}(T)=\{x\in X:Tx=\theta\},$$

称之为T的零空间或核(亦可记为$\ker T$),则$\mathscr{N}(T)$是X的一个闭子空间.

如果赋范线性空间X是有限维的,那么可得以下重要结论:

(1)X是完备的;

(2)X的每个子空间都是闭的;

(3)X中子集A是紧集,当且仅当A是有界闭集;

(4)X上的任一线性算子都是有界的;

(5)X的对偶空间X^*与X是等距同构的.

关于(5),见下述定义.

定义1.5.14 设X,Y是赋范线性空间,$T:X\to Y$是线性算子,若T是X与Y之间的一一对应,且$\forall x\in X$有$\|Tx\|=\|x\|$,则称T为X到Y上的等距同构映射,称X与Y是等距同构的.当X与Y等距同构时,可记为$X\cong Y$,并且有时视它们为同一,而写为$X=Y$.

例1.5.6 $\mathbf{R}^n$的对偶空间是$\mathbf{R}^n$,即$(\mathbf{R}^n)^*=\mathbf{R}^n$.

事实上,设$f\in(\mathbf{R}^n)^*$,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是$\mathbf{R}^n$的一个基,其中e_i的坐标除第i个是1外其余全是0,$i=1,2,\cdots,n$.令$a_i=f(e_i),i=1,2,\cdots,n$,则对于任意$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in\mathbf{R}^n$,有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i)=\sum_{i=1}^{n}x_ia_i.$$

令 $a=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$，则 $a\in\mathbf{R}^n$ 且 a 由 f 唯一地确定；反之，对于每一个 $a\in\mathbf{R}^n$，$a=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$，由 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_ia_i$，$\forall x\in\mathbf{R}^n$ 也唯一地确定了 $\mathbf{R}^n$ 上的有界线性泛函 f. 因此上述把 f 映成 a 的映射是 $(\mathbf{R}^n)^*$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的一一对应且显然是线性的. 只需再证此一一对应保持范数，即 $\|f\|=\|a\|$.

应用 Cauchy-Schwarz 不等式，从对任 $x\in\mathbf{R}^n$ 成立

$$|f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_ia_i|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\|x\|\cdot\|a\|$$

得出 $\|f\|\leqslant\|a\|$；另一方面，取 $x_0=a$，则

$$|f(x_0)|=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\|x_0\|\cdot\|a\|,$$

故 $\|f\|\geqslant\|a\|$，因此 $\|f\|=\|a\|$. 总之 $(\mathbf{R}^n)^*$ 与 $\mathbf{R}^n$ 是等距同构的.

此外可得出：$(l^p)^*=l^q$ 以及 $(\mathrm{L}^p[a,b])^*=\mathrm{L}^q[a,b]\left(1<p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 等等. 作为例子，我们简述最后一式的含义如下.

空间 $\mathrm{L}^p[a,b]$ 上的任一有界线性泛函 f 线性地一一对应着 $\mathrm{L}^q[a,b]$ 中的一个元素 $y(t)$，使得对任一元素 $x(t)\in\mathrm{L}^p[a,b]$，有

$$f(x)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t,$$

且

$$\|f\|=\|y\|_q\equiv\left[\int_a^b|y(t)|^q\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}.$$

设 x_0 是数域 $\mathbf{K}$ 上的赋范线性空间 X 中一非零元，则 $M=\mathrm{span}\{x_0\}=\{ax_0:a\in\mathbf{K}\}$ 是 X 的子空间. 在 M 上定义线性泛函 f 使得 $f(ax_0)=a\|x_0\|$，$\forall a\in\mathbf{K}$，则易得 $\|f\|=1$，且 $f(x_0)=\|x_0\|$. 在整个 X 上是否存在一个有界线性泛函 F，它是上述 f 的"保范扩张"？下面的定理表明，答案是肯定的.

定理 1.5.2(Hahn-Banach 扩张定理) 设 X 是赋范线性空间，f 是定义在 X 的子空间 M 上的有界线性泛函，则存在 X 上的有界线性泛函 F，使得 $\|F\|=\|f\|$，且 $\forall x\in M$，$F(x)=f(x)$.

由此定理立即得出如下的有界线性泛函存在定理，它有很多应用.

推论 1.5.1 设 X 是赋范线性空间，x_0 是 X 中一非零元，则存在 X 上有界线性泛函 f，使 $\|f\|=1$ 且 $f(x_0)=\|x_0\|$.

这个推论又可以有如下推论：若赋范线性空间 X 中一元素 x_0 满足：对任一 $f\in X^*$，都有 $f(x_0)=0$，则必有 $x_0=\theta$；此外，对赋范线性空间 X 中任一元素 x，成立

$$\|x\|=\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|\neq0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

下面介绍两个应用上述结果的例子. 第一个例子是关于伴随算子范数的.

定义 1.5.15 设 X,Y 是两个赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$. 算子 $T^*:Y^*\to X^*$，定义为

$$\forall g \in Y^*, (T^* g)(x) = g(Tx), \forall x \in X,$$

称为 T 的伴随算子(或共轭算子).

定理 1.5.3　设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子,则 T 的伴随算子 T^* 也是有界线性算子,且 $\|T^*\| = \|T\|$.

证明　先证 T^* 是线性的.由 Y^* 是线性空间,得出对 $\forall g_1, g_2 \in Y^*, \alpha, \beta \in K$,有

$$\begin{aligned} T^*(\alpha g_1 + \beta g_2)(x) &= (\alpha g_1 + \beta g_2)(Tx) \\ &= \alpha g_1(Tx) + \beta g_2(Tx) \\ &= \alpha(T^* g_1)(x) + \beta(T^* g_2)(x), \end{aligned}$$

故 T^* 是线性的.

其次证明 $\|T^*\| = \|T\|$.由于

$$\|T^* g\| = \|gT\| \leqslant \|g\| \cdot \|T\|, 得 \|T^*\| \leqslant \|T\|;$$

另一方面,$\forall x_0 \in X$,当 $\|Tx_0\| \neq 0$ 时,记 $y_0 = Tx_0, y_0 \neq \theta$,则由推论 1.5.1 知存在 $g_0 \in Y^*$,使 $\|g_0\| = 1$ 且 $g_0(y_0) = \|y_0\|$.由于 T^* 已证得是有界线性算子,故

$$\|T^* g_0\| \leqslant \|T^*\| \|g_0\|,$$

从而,

$$\begin{aligned} \|Tx_0\| &= \|y_0\| = g_0(y_0) \\ &= g_0(Tx_0) = (T^* g_0)(x_0) \\ &\leqslant \|T^* g_0\| \|x_0\| \\ &\leqslant \|T^*\| \|g_0\| \|x_0\| \\ &\leqslant \|T^*\| \|x_0\|, \end{aligned}$$

且当 $Tx_0 = \theta$ 时上式也成立,故又有 $\|T\| \leqslant \|T^*\|$,从而 $\|T\| = \|T^*\|$.证毕.

第二个例子与赋范线性空间 X 在其二次共轭空间中的“嵌入”有关.

称 X^* 为 X 的一次共轭空间,而称 X^* 的一次共轭空间为 X 的二次共轭空间并记为 X^{**}.

下面证明在等距同构意义下,任一赋范线性空间 X 是 X^{**} 的子空间,记为 $X \subset X^{**}$.

事实上,$\forall x \in X$,从 $f \in X^*$ 得出 $f(x) \in \mathbf{K}$ 的映射,显然是一个线性泛函,且由

$$|f(x)| \leqslant \|x\| \|f\|, \forall f \in X^*,$$

可知它是 X^* 上的一个有界线性泛函,记为 x^{**},则 x^{**} 被唯一确定,并且 $x^{**} \in X^{**}$,满足

$$x^{**}(f) = f(x), \forall f \in X^*.$$

根据算子范数的定义以及由推论 1.5.1 得出的第二个结论,立即得出 $\|x^{**}\| = \|x\|$.称把 $x \in X$ 映成 $x^{**} \in X^{**}$ 的映射为典则映射(或标准嵌入映射),那么典则映射给出了从 X 到 X^{**} 的一个子空间的等距同构.故 $X \subset X^{**}$ 在等距同构意义下成立.

若成立 $X = X^{**}$,则称 X 为一个自反空间,$\mathbf{R}^n$, l^p 和 $\mathrm{L}^p[a,b](1 < p < \infty)$是这种空间的例子.

若成立 $X = X^*$,则称 X 为一个自共轭空间,$\mathbf{R}^n$, l^2 和 $\mathrm{L}^2[a,b]$是这种空间的例子.

当 X 是一个自反的赋范线性空间时,按照下述关于“弱收敛”和“弱*收敛”的定义,容易得出:X^* 中弱收敛的概念与弱*收敛的概念等价.

定义 1.5.16　设 X 是赋范线性空间,X^* 是其共轭空间,$\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$,如果 $\forall f \in$

X^*,有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0),$$

则称$\{x_n\}$弱收敛于x_0,记为$x_n \xrightarrow{w} x_0, n\to\infty$,或 (弱)$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

设$\{f_n\}\subset X^*$, $f_0\in X^*$,如果$\forall x\in X$,有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x),$$

则称$\{f_n\}$弱*收敛于f_0,记为$f_n \xrightarrow{w^*} f_0, n\to\infty$, 或 (弱*)$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_0$.

定理 1.5.4 设X是自反的Banach空间,$\{x_n\}$是X中的有界点列,则$\{x_n\}$有弱收敛的子列.

这个定理的证明在X又是一个可分空间的条件下比较容易,对于一般情形,则要用到Eberlein-Smulian定理和Alaoglu定理.前者说的是Banach空间中的子集是相对弱紧的充要条件是该子集是相对弱列紧的(其中"相对"两字用来表示该集的闭包具有后面所述的紧性),而后者说的是在赋范线性空间的共轭空间中,闭单位球是弱*紧集.

通常称赋范线性空间中点列按范数导出的距离的收敛为强收敛.强收敛、弱收敛及弱*收敛等等分别确定了空间中元素之间不同的"任意逼近"概念,常说成确定了空间上不同的拓扑(结构),比如说,强拓扑、弱拓扑等等.

于是,不难理解像弱闭和弱*列紧这样一些概念.例如,称A是赋范线性空间X中的弱闭子集,是指A满足:若$\{x_n\}\subset A$有$x_n \xrightarrow{w} x_0$,则$x_0\in A$;称$\varphi\subset X^*$是弱*列紧的,是指φ满足:$\forall \{f_n\}\subset\varphi$,存在子列$\{f_{n_k}\}\subset\varphi$和$f_0\in X^*$,使

$$f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f_0, k\to\infty,$$

等等.

至于"拓扑"两字,有着种种不同的含义,其中一种就是某个空间中全体开集的族,或者说是规定空间中怎样的子集是开集的准则(参见后面1.7关于拓扑空间的简介).

1.6 内积空间

在抽象的线性空间上建立内积结构,便不仅能产生元素之间"远近"的概念,还能产生元素之间"垂直"与否的概念,从而使空间更加类似于欧几里得空间,在其中可有正交集、正交投影等几何概念.抽象的内积是复欧几里得空间——酉空间中内积的推广.

定义 1.6.1 设X是实或复的数域$\mathbf{K}$上的线性空间.若$X\times X$上泛函$(\cdot,\cdot)$(必要时写为$\langle\cdot,\cdot\rangle$):$X\times X\to\mathbf{K}$,满足下列条件:

(1)$(x,x)\geqslant 0$,当且仅当$x=\theta$时$(x,x)=0$;

(2)$(x,y)=\overline{(y,x)}$, $\forall x,y\in X$;

(3)$(\alpha x+\beta x,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$, $\forall x,y,z\in X$, $\alpha,\beta\in\mathbf{K}$.

则称$(\cdot,\cdot)$为X上的一个内积,(x,y)为元素x与y的内积,并称$(X,(\cdot,\cdot))$为一内积空间,常简记为X.

例 1.6.1 设$\mathrm{C}[a,b]$中函数也可取复数值,若规定

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t,\ \forall x,y\in \mathrm{C}[a,b],$$

则$(\mathrm{C}[a,b],(\cdot,\cdot))$就是一个无限维的内积空间.

例 1.6.2　在 $\mathbf{R}^n$ 中,元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的内积定为$\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i$,$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,显然 $\mathbf{R}^n$ 是抽象内积空间的一个特例.在 $\mathbf{R}^n$ 中,成立 Cauchy 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right),$$

亦即

$$(x,y)^2\leqslant(x,x)(y,y).$$

在一般内积空间中,成立如下定理.

定理 1.6.1　设$(X,(\cdot\ ,\cdot))$是一个内积空间,则成立下述 Schwarz 不等式:

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)(y,y),\ \forall x,y\in X. \tag{1.6.1}$$

证明　当 $y=\theta$ 时,式(1.6.1)显然成立.设 $y\neq\theta$,则$(y,y)>0$.由于对任何数 λ 均有

$$\begin{aligned}0&\leqslant(x+\lambda y,x+\lambda y)\\&=(x,x)+\lambda(y,x)+\lambda(x,y)+|\lambda|^2(y,y)\\&=\left(\lambda(y,y)^{\frac12}+\frac{(x,y)}{(y,y)^{\frac12}}\right)\left(\bar\lambda(y,y)^{\frac12}+\frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)^{\frac12}}\right)+\left((x,x)-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\right),\end{aligned}$$

现取 $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$,则得$(x,x)-\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\geqslant0$,这等价于 $y\neq\theta$ 时的式(1.6.1).证毕.

下一定理表明任一内积空间都是一个赋范线性空间,从而也是一个距离空间.

定理 1.6.2　设 X 是一个内积空间,若定义 $\|x\|=(x,x)^{\frac12}$,$\forall x\in X$,则映射 $\|\cdot\|$ 就是 X 上的一个范数.

证明　主要验证 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式,因为范数的另两条要求显然满足.由 Schwarz 不等式(1.6.1)得出

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)\\&=(x,x)+(y,x)+(x,y)+(y,y)\\&\leqslant\|x\|^2+2|(x,y)|+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\ \|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

故

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

证毕.

在上述内积导出的范数意义下,就可以在内积空间中讨论极限、收敛以及赋范线性空间中的各种问题,这就使内积空间理论在数学物理、量子物理、微分方程和概率论等多方面有重要而广泛的应用.

根据定理 1.6.1 还可得出,内积本身对于其变元都是连续的映射,例如,当 $x,y,z\in X$ 且 $y\to z$ 时,必有$(x,y)\to(x,z)$.

定义 1.6.2　若内积空间 X 按内积导出的范数意义成为一个 Banach 空间,则称 X 为一

个 Hilbert 空间.

例 1.6.3 在电信工程中,信号常能看成是定义在$(-\infty,+\infty)$上的时间 t 的函数 $x(t)$,通常考虑能量有限的信号,即 $x(t)$满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty,$$

全体这样的函数 $x(t)$构成一个内积空间,即 $L^2(\mathbf{R})$,其中内积的定义为

$$(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t,$$

可以证明,此空间是一个 Hilbert 空间.

例 1.6.4 $l^2=\{x=\{x_n\}_{n\geqslant 1}:\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<+\infty\}$,按内积

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$$

形成一个 Hilbert 空间.这是 Hilbert 原先曾研究的一个空间.

定义 1.6.3 设$(X,(\cdot,\cdot))$是一个内积空间.若 $x,y\in X$ 满足$(x,y)=0$,则称 x 与 y 正交,记为 $x\perp y$;若 V 是 X 的子集,$x\in X$ 使得 $x\perp y$, $\forall y\in V$,则称 x 与 V 正交,记为 $x\perp V$.对于集 $W\subset X$,集$\{x\in X|x\perp W\}$称为 W 的正交补,记作 $W^{\perp}$.对于 X 的两个子集 V 和 W,若成立 $x\perp y$, $\forall x\in V$, $\forall y\in W$,则称 V 和 W 正交,记为 $V\perp W$.

根据定义容易得出下述结论:

(1) $x\perp y\Rightarrow\|x+y\|=\|x-y\|$,且 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$;

(2) $x\perp y$, $\forall y\in X\Leftrightarrow x=\theta$;

(3) $V,W\subset X$ 且 $V\perp W\Rightarrow V\subset W^{\perp}$, $W\subset V^{\perp}$;

(4) $V\subset W\subset X\Rightarrow V^{\perp}\supset W^{\perp}$;

(5) $V\subset X\Rightarrow V^{\perp}\cap V\subset\{\theta\}$.

在很多实际问题中,要考虑元素 x 与一个集合 M 的距离能否由 M 中一个唯一的元素 y_0 来实现,即是否存在唯一的 $y_0\in M$,使得

$$\|x-y_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

即

$$d(x,y_0)=d(x,M)?$$

一般而言,答案是不肯定的,但当 M 是内积空间中完备的凸集时,这个问题有肯定的回答,称之为变分引理.

定义 1.6.4 设 X 是线性空间,$M\subset X$.若对于 $\forall x,y\in M$,集

$$\{\alpha x+(1-\alpha)y|0\leqslant\alpha\leqslant 1\}\subset M,$$

则称 M 为 X 中一个凸集.

定理 1.6.3(变分引理) 设 X 是内积空间,M 是 X 中的非空凸集,且按内积导出的距离是完备的,则对于每个 $x\in X$,存在唯一的 $y_0\in M$,使得

$$\|x-y_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

此定理的证明从略.由于内积空间的线性子空间都是凸集,所以定理的结论在 M 是 X 的完备子空间时成立.进一步考察 $M=\mathbf{R}^3$ 或 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中过原点的一个平面的情形,可看到当 y_0

$\in M$,使 $x-y_0$ 的长度是诸向量 $x-y, y\in M$ 的长度的最小值时,$x-y_0$ 垂直于 M.这一性质可以推广到一般的内积空间中去.

定义 1.6.5　设 X 是内积空间,M 是 X 的一个线性子空间,$x\in X$.若存在 $x_0\in M$ 和 $x_1\in M^{\perp}$,使得

$$x=x_0+x_1,$$

则称 x_0 是 x 在 M 上的投影,称上式为 x 的正交分解.

定理 1.6.4　设 X 是内积空间,M 是 X 的完备子空间,则对于每个 $x\in X$,x 在 M 上的投影存在且唯一,即存在唯一的 $x_0\in M, x_1\in M^{\perp}$,使得

$$x=x_0+x_1,$$

而且

$$\|x-x_0\|=\|x_1\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

我们略去这个定理的证明而指出它在逼近理论方面的应用:当 X 是内积空间,M 是 X 的完备子空间时,对每个 $x\in X$ 而言,若要以 M 中的元素来逼近 x,则以它在 M 上的投影 x_0 为唯一的最佳元素,因为此时,逼近的误差最小.通常将 x 在 M 上的投影称为 x 在 M 上的最佳平方逼近元.

例 1.6.5　若 $M=\mathrm{span}\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx\}$,则 M 是 $C[0,2\pi]$ 的子空间,且 $\dim M=2n+1$,从而是完备的.于是 $\forall\, T_n\in M$,有数 $a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n$,使得

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

称 $T_n(x)$ 为 n 阶三角多项式.对每一个 $f\in C[0,2\pi]$,f 在 M 上的最佳平方逼近元 T_n^*,就是系数等于 $f(x)$ 的 Fourier 系数的 n 阶三角多项式:

$$T_n^*(x)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^*\cos kx+b_k^*\sin kx),$$

其中

$$a_k^*=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x,\ k=0,1,\cdots,n,$$

$$b_k^*=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x,\ k=1,\cdots,n.$$

因为此时 $\delta^2=\|f-T_n^*\|^2=\int_0^{2\pi}[f(x)-T_n^*(x)]^2\mathrm{d}x$ 最小.

最佳平方逼近问题的一般提法是:设 $M=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是内积空间 X 的一个 n 维子空间,$x\in X$.求 n 个数 $\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*\in\mathbf{K}$,使得

$$\delta^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^*x_k\|^2=\min_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{K}}\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k\|^2.$$

函数逼近论中的平方逼近,数据处理中的最小二乘法以及回归分析等,都可以归结为这个问题.

定义 1.6.6　设 V 是内积空间 X 的非空子集.若 V 中的元素两两正交,则称 V 是 X 的一个正交集.若正交集 V 的每个元素的范数均为 1,即 $\forall\, x,y\in V$,有

$$(x,y)=\begin{cases}0, & x\neq y,\\ 1, & x=y,\end{cases}$$

则称 V 是规范正交集或标准正交集.

例1.6.6 在实内积空间 $C[0,2\pi]$ 中(内积定义见例 1.6.1), $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$ 是一个正交集，而 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots\right\}$ 是一个标准正交集.

显然任何不含零元素的正交集 V 都可以非常容易地化为标准正交集

$$W=\left\{\frac{x}{\|x\|}:x\in V\right\}.$$

容易证明,任何不含零元素的正交集都是线性无关的,但线性无关集不一定是正交集.然而可以按下面的方法将一个线性无关集化为一个标准正交集.

定理 1.6.5(Gram-Schmidt 标准正交化方法) 设 $V=\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是内积空间 X 中的一个线性无关序列,则存在一个标准正交序列 $W=\{y_n\}_{n\geq 1}$,使得

$$\text{span}\{x_n:n\geq 1\}=\text{span}\{y_n:n\geq 1\}.$$

证明 (此定理的证明过程就是将 V 标准正交化为 W 的方法)因为 V 线性无关,故 $x_n\neq 0,n=1,2,\cdots$. 取 $y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}$,则 $\|y_1\|=1$. 令 $z_2=x_2-(x_2,y_1)y_1$,于是 $(z_2,y_1)=0$,即 $z_2\perp y_1$,且由 $\{x_1,x_2\}$ 线性无关知 $z_2\neq 0$,取 $y_2=\frac{z_2}{\|z_2\|}$,则 $\|y_2\|=1,y_2\perp y_1$,故得标准正交集 $\{y_1,y_2\}$. 一般地,可归纳地定义

$$z_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}(x_n,y_k)y_k,$$

并取

$$y_n=\frac{z_n}{\|z_n\|},n=2,3,\cdots,$$

则 $W=\{y_n\}_{n\geq 1}$ 是由 V 得到的一个标准正交序列.

由上面的构造方法也可看出: $\forall n\in\mathbf{N}$, $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 与 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 可以互相线性表示. 所以

$$\text{span}\{x_n:n\geq 1\}=\text{span}\{y_n:n\geq 1\}.$$

证毕.

下面将高等数学中的 Fourier 级数理论推广到一般内积空间中.

定义 1.6.7 设 V 是内积空间 X 的一个标准正交集, $x\in X$, 称数集 $\{(x,e)\mid e\in V\}$ 是元素 x 关于 V 的广义 Fourier 系数集, 其中 (x,e) 称为 x 关于 e 的广义 Fourier 系数.

由例 1.6.6, $\forall f\in C[0,2\pi]$,关于标准正交集

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots\right\}$$

的广义 Fourier 系数:

$$\left(f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}a_0,$$

$$\left(f,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}a_n,$$

$$\left(f,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}b_n,\ n=1,2,\cdots,$$

除相差一个常数因子$\sqrt{\pi}$或$\sqrt{\pi/2}$外,就是 $f(x)$的 Fourier 系数.

例 1.6.7 设 $e_n=(0,\cdots,0,\overset{第n个}{1},0,\cdots)$, 则 $V=\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$是 l^2 空间的一个标准正交集, $\forall x=\{x_n\}_{n\geqslant1}\in l^2$ 关于 V 的广义 Fourier 系数为$(x,e_n)=x_n,n=1,2,\cdots$.

内积空间中的标准正交集具有许多很重要的性质.我们给出下面三个定理但略去证明.

定理 1.6.6 设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的内积空间, $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 X 的标准正交集, $V=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,则$\forall x\in X$ 有

(1)x 在V 上的投影$y=\sum\limits_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$;

(2)x 在V 上的投影y 满足

$$\|y\|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2,\ \|x-y\|^2=\|x\|^2-\|y\|^2;$$

(3)$\sum\limits_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2$;

(4)$\left\|x-\sum\limits_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|\leqslant\left\|x-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|,\ \forall\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{K}$,

且等号成立的充要条件为 $\alpha_i=(x,e_i),i=1,2,\cdots,n$.

定理 1.6.7(Bessel 不等式) 设$\{e_i\}_{i\geqslant1}$是内积空间 X 的标准正交序列,则$\forall x\in X$,Bessel 不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2$$

成立.

Bessel 不等式表明,内积空间 X 的任一个元素x 关于标准正交序列$\{e_1,e_2,\cdots,e_i,\cdots\}$的广义 Fourier 系数构成的数列$\{(x,e_i)\}_{i\geqslant1}$是 l^2 中的元素,那么反过来, $\forall\alpha=\{\alpha_i\}_{i\geqslant1}\in l^2$,是否存在 $x\in X$,使得 α 就是x 关于$\{e_1,\cdots,e_i,\cdots\}$的广义 Fourier 系数序列呢? 当 X 是 Hilbert 空间时,回答是肯定的.

定理 1.6.8(Riesz-Fischer 定理) 设$\{e_i\}_{i\geqslant1}$是 Hilbert 空间 X 中的标准正交序列,则$\forall\alpha=\{\alpha_i\}_{i\geqslant1}\in l^2$,存在 $x\in X$,使得

$$\alpha_i=(x,e_i),i=1,2,\cdots,且\ \|\alpha\|=\|x\|.$$

同高等数学中一样,我们称无穷级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$ 为内积空间X 中的元素x 关于标准正交序列$\{e_i\}_{i\geqslant1}$的广义 Fourier 级数.

由 Bessel 不等式及定理 1.6.6 知当 X 是 Hilbert 空间时, $\forall x\in X$, $\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$,是收敛的,那么在什么条件下成立 $x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$ 呢(当 $x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$ 时,我们称 x 能展为广义 Fourier 级数)? 下面的定理表明,在 Hilbert 空间中,这个问题等价于 Bessel 不等式何时成为等式,即

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2=\|x\|^2,$$

通常将此式称为 Parseval 等式.

定理 1.6.9 设 $\{e_i\}_{i\geqslant 1}$ 是 Hilbert 空间 X 的标准正交序列,则

$$\forall x\in X, x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$$

的充要条件是成立 Parseval 等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2=\|x\|^2.$$

证明 对任一 $x\in X$,显然有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|(x,e_i)e_i\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2<+\infty,$$

且对任意正整数 n 有

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|^2+\left\|\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2,$$

即

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2,$$

于是令 $n\to\infty$,并由范数的连续性得

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2,$$

所以 $x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$ 的充要条件是 $\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2=\|x\|^2$ 成立. 证毕.

那么 Parseval 等式何时成立呢? 为回答这个问题,我们引入完全标准正交集的概念.

定义 1.6.8 设 V 是内积空间 X 的标准正交集. 若 $V^{\perp}=\{0\}$(即 $x\perp V$ 当且仅当 $x=0$),则称 V 是 X 的完全标准正交集.

例如,例 1.6.7 中的 $V=\{e_1,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是 l^2 的一个完全标准正交序列,因为若 $x=\{x_n\}_{n\geqslant 1}\in l^2$,且 $x\perp V$,则

$$x_n=(x,e_n)=0, n=1,2,\cdots,$$

即 $x=0\in l^2$.

定理 1.6.10(Parseval 定理) 设 $V=\{e_i\}_{i\geqslant 1}$ 是 Hilbert 空间 X 的标准正交序列,则 $\forall x\in X$,Parseval 等式成立(即 $\forall x\in X$ 能展为关于 V 的 Fourier 级数)的充要条件是 $V=\{e_i\}_{i\geqslant 1}$ 是完全的.

证明 必要性:若 $x\perp V$,则 $\forall i=1,2,\cdots,(x,e_i)=0$,于是由 Parseval 等式得

$$\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 = 0,$$

从而 $x = 0$,所以 V 是完全的.

充分性:$\forall x \in X$,已知 $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$ 收敛,令 $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i = y$,只需证明 $y = x$.事实上,$\forall e_k \in V$ 及 $\forall n \geqslant k$,有

$$(x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i, e_k) = (x, e_k) - \sum_{i=1}^{n}[(x, e_i)(e_i, e_k)] = (x, e_k) - (x, e_k) = 0,$$

令 $n \to \infty$ 并由内积的连续性得

$$(x - y, e_k) = 0,$$

再由 e_k 的任意性得 $(x - y) \perp V$.因为 V 是完全的,所以 $x - y = 0$,即 $y = x$.也就是说 $\forall x \in X$,x 都能展成关于 V 的广义 Fourier 级数.证毕.

在本节的最后,我们不加证明地给出关于 Hilbert 空间上有界线性泛函的著名的 Riesz 表示定理.

定理 1.6.11(Riesz 表示定理) 设 X 是 Hilbert 空间.对 X 上任一线性有界泛函 f,存在唯一的 $y_f \in X$,使得

$$f(x) = (x, y_f), \forall x \in X, \text{且} \quad \| f \| = \| y_f \|;$$

反过来,任一 $y \in X$,在 X 上以

$$f_y(x) = (x, y), \forall x \in X$$

定义了有界线性泛函 f_y,且有 $\| f_y \| = \| y \|$.

1.7 拓扑空间简介

在距离空间(赋范线性空间、内积空间都是距离空间)中的极限概念以及开集、闭集、紧集等概念都是通过"距离"而建立的,但是有些类型的极限却不能用距离来描述,例如函数序列 $\{f_n(x)\}_{n\geqslant1}$ 在集合 X 上处处收敛于极限函数 $f(x)$(即 $\forall x \in X$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$),又如赋范线性空间 X 中点列 $\{x_n\}_{n\geqslant1}$ 弱收敛于 $x \in X$(即存在 $x \in X$,使得 $\forall f \in X^*$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$),都是如此(具体证明从略).因此,需要寻求新的途径,建立比距离空间中的极限更为一般的极限概念.

我们知道距离空间中极限概念也可以用由距离定义的邻域来刻画,例如 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$,可描述为对 x 的任一 ε 邻域 $B(x;\varepsilon)$,存在正整数 N,使得 $x_n \in B(x;\varepsilon)$ 对一切 $n \geqslant N$ 成立,也可以把上面 ε 邻域 $B(x;\varepsilon)$ 换成更一般的邻域.

我们注意到 ε 邻域本身是开集,广义的邻域也可由开集来定义,故若在一个非空集合中,先直接定义开集,再定义邻域等概念,那么我们也可以像在距离空间中那样定义序列的极限以及闭集等各种概念而不涉及"距离".

距离空间中的开集具有三个最基本的性质,即空集和全空间是开集、任意多个开集的并是开集、有限多个开集的交是开集.我们以这三条性质作为出发点来规定一个非空集合的开子集族,便得到拓扑与拓扑空间的概念.

定义 1.7.1 设 $\mathscr{T}$ 是非空集合 X 的一个子集族. 若 $\mathscr{T}$ 满足下述的拓扑公理:

(1) $X\in\mathscr{T}$, $\varnothing\in\mathscr{T}$;

(2) $A_\lambda\in\mathscr{T}\ (\lambda\in\Lambda)\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\mathscr{T}$;

(3) $A_i\in\mathscr{T}\ (i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{T}$.

则称 $\mathscr{T}$ 是集合 X 上的一个拓扑(topology). X 与 $\mathscr{T}$ 一起称为拓扑空间,记为 $(X,\mathscr{T})$,简记为 X. $\mathscr{T}$ 中的每一个成员都称为拓扑空间 X 中的开集.

例 1.7.1 设 $X=\{a,b,c\}$,则易验证 $\mathscr{T}=\{X,\{a,b\},\{a,c\},\{a\},\varnothing\}$ 是 X 上的一个拓扑,所以 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间,而 $X,\{a,b\}\{a,c\},\{a\},\varnothing$ 均为 X 的开集. 但 $\{X,\{a,b\},\{a,c\},\varnothing\}$ 不是 X 上的拓扑,因为 $\{a,b\}\cap\{a,c\}=\{a\}$ 不属于这个集族.

例 1.7.2 设 X 是任一非空集合,令 $\mathscr{T}_0=\{X,\varnothing\}$,则显然 $\mathscr{T}_0$ 是 X 上的一个拓扑,$\mathscr{T}_0$ 包含的开集个数最少,称 $\mathscr{T}_0$ 是 X 上的平庸拓扑,$(X,\mathscr{T}_0)$ 称为平庸拓扑空间.

又令 $\mathscr{T}_d=\{A:A\subset X\}$,即 $\mathscr{T}_d$ 是 X 的所有子集组成的集族,则显然 $\mathscr{T}_d$ 是 X 上的一个拓扑,$\mathscr{T}_d$ 包含的开集个数最多,称为离散拓扑,$(X,\mathscr{T}_d)$ 称为离散拓扑空间.

由例 1.7.2 可知:①在任何非空集合上都可以定义拓扑,使之成为拓扑空间;②在同一集合上,可以定义不同的拓扑,使之成为不同的拓扑空间.

若 X 上的两个拓扑 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 具有包含关系 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$,则称 $\mathscr{T}_1$ 为较弱(或较粗)拓扑,同时称 $\mathscr{T}_2$ 为较强(或较细)拓扑. 由上可知平庸拓扑是最弱拓扑,离散拓扑是最强拓扑.

例 1.7.3 设 (X,d) 是距离空间,由定义立即可知 $\mathscr{T}=\{G\mid G$ 是 (X,d) 的开集$\}$ 是 X 上的一个拓扑,称 $\mathscr{T}$ 是由距离 d 导出的拓扑.

本例说明距离空间必定是一个拓扑空间,当然还可以在 X 上定义其他拓扑,但今后说距离空间是一个拓扑空间时,其上的拓扑 $\mathscr{T}$ 就是由距离导出的拓扑. 反过来,是否每一个拓扑空间的拓扑都可以由距离导出呢? 回答是否定的. 这就引出了拓扑空间的可度量化(可距离化)问题.

定义 1.7.2 设有拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$. 若在 X 上存在一个距离 d,使得 $\mathscr{T}$ 就是由 d 导出的拓扑(即 $\mathscr{T}$ 就是距离空间 (X,d) 的开集的全体),则称拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是可度量化的.

例 1.7.4 离散拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_d)$ 是可度量化的,因为 X 上的离散距离 d 导出的拓扑就是 $\mathscr{T}_d$.

不可度量化的拓扑空间是存在的. 例如当 X 是多于一点的集合时,平庸拓扑空间便不可度量化(证明从略). 由此可见,拓扑空间是比距离空间更广泛的一类空间.

定义 1.7.3 设 A 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的子集,令

$$\mathscr{T}_A=\{G\cap A:G\in\mathscr{T}\},$$

则显然 $\mathscr{T}_A$ 满足拓扑的三个公理,即 $(A,\mathscr{T}_A)$ 也是一个拓扑空间,称之为 $(X,\mathscr{T})$ 的子空间.

有了开集以后,可以将距离空间中的闭集、邻域、聚点、导集、极限点等许多概念及有关结论推广到一般的拓扑空间中去.

定义 1.7.4 设 $A\subset(X,\mathscr{T})$. 若 $A^C\in\mathscr{T}$(即 A^C 是 X 中的开集),则称 A 是 X 中的闭集.

定义 1.7.5 设 U 是 $(X,\mathscr{T})$ 中的一个开集,则 $\forall x\in U$,称 U 是 x 一个开邻域,简称为邻域. 同样 $\forall A\subset U$,称 U 为子集 A 的一个邻域.

定义 1.7.6　设 A 是$(X,\mathscr{T})$的子集,$x\in X$,则

(1)若$\exists U\in\mathscr{T}$,使得 $x\in U\subset A$,则称 x 为A 的内点,A 的全体内点构成的集合称为A 的内部,记为 A^{o} 或 $\operatorname{Int} A$.

(2)若 x 的每一个邻域U 都包含$A-\{x\}$中的点,即 $U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$,则称 x 是A 的聚点,A 的聚点的全体称为A 的导集,记为 A^{d} 或A',称 $A\cup A^{d}$ 为A 的闭包,记为 $\overline{A}$.

(3)设$\{x_n\}_{n\geq 1}$是 X 中的一个点列,若对于 x 的任一个邻域U,存在 $n_0\in\mathbf{N}$,使得 $n\geq n_0$ 时有 $x_n\in U$,则称 x 是$\{x_n\}$的一个极限点,也称$\{x_n\}$收敛于点 x,记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$.

定义 1.7.7　设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间. 若$\forall x,y\in X$,当 $x\neq y$ 时,必存在 x 的邻域 U_x 和 y 的邻域 U_y,使得 $U_x\cap U_y=\varnothing$,则称$(X,\mathscr{T})$是一个 Hausdorff 空间.

由此定义易知,距离空间都是 Hausdorff 空间.

同距离空间中一样,下列结论是成立的.

定理 1.7.1　设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间,则

(1)X 与$\varnothing$是闭集;

(2)有限多个闭集的并是闭集;

(3)任意多个闭集的交是闭集.

定理 1.7.2　设 $A,B\subset(X,\mathscr{T})$,则

(1)　$\overline{\varnothing}=\varnothing$;

(2)　$A\subset\overline{A}$;

(3)　$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;

(4)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

值得注意的是,在一般拓扑空间与距离空间之间至少有以下两个区别:

(1)拓扑空间中的有限点集也可能有聚点;

(2)拓扑空间中的收敛点列的极限点可能不是唯一的.

例 1.7.5　设 $X=\{a,b,c\}$,令 $\mathscr{T}=\{X,\{a,b\},\varnothing\}$,则$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间. 由聚点定义立即可知 a 和b 都是有限集合$\{a,b\}$的聚点,而 a,b,c 均为$X=\{a,b,c\}$的聚点.

例 1.7.6　$X=[0,1]$,令 $\mathscr{T}_0=\{X,\varnothing\}$,即$(X,\mathscr{T}_0)$是平庸拓扑空间,则 X 的任一点x_0 都是 X 中任一点列$\{x_n\}$的极限点. 这是因为$\forall x_0\in X$,X 是其唯一的邻域,因此$\forall n\in\mathbf{N}$,恒有 $x_n\in X$,故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$.

定理 1.7.3　设$(X,\mathscr{T})$是一个 Hausdorff 空间,$\{x_n\}\subset X$,则有

(1)X 中的每一个单点集$\{x\}$都是闭集;

(2)若$\{x_n\}$收敛,则其极限点是唯一的.

证明　(1)只需证明$\{x\}^{C}$是开集. $\forall y\in\{x\}^{C}$,显然 $x\neq y$,因 X 是 Hausdorff 空间,故存在 x 的邻域U_x 及y 的邻域U_y,使得 $U_x\cap U_y=\varnothing$,故 $U_y\subset U_x^{C}$. 又$\{x\}\subset U_x$,$U_x^{C}\subset\{x\}^{C}$,故 $U_y\subset\{x\}^{C}$,即$\{x\}^{C}$是开集.

(2)假设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y$,且 $x\neq y$. 由于 X 是 Hausdorff 空间,故存在 x 的邻域U_x 及y 的邻域U_y,使得 $U_x\cap U_y=\varnothing$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$,所以$\exists n_1\in\mathbf{N}$,使得当 $n\geq n_1$ 时恒有 $x_n\in U_x$,又$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y$,故$\exists n_2\in\mathbf{N}$,使当 $n\geq n_2$ 时恒有 $x_n\in U_y$,令 $n_0=\max(n_1,n_2)$,则当 $n\geq$

n_0 时,有 $x_n \in U_x \cap U_y$,于是与 $U_x \cap U_y = \varnothing$矛盾.因此只能有 $x = y$.证毕.

定义 1.7.8 设$(X,\mathscr{T})$,(Y,τ)是两个拓扑空间,$f:X \to Y$ 是映射,$x_0 \in X$.若对于 $f(x_0)$ 的任一邻域 $V \in \tau$,都存在 x_0 的邻域 $w \in \mathscr{T}$,使得 $f(w) \subset V$,则称映射 f 在点 x_0 连续,若 f 在 X 的每一点连续,则称 $f:X \to Y$ 是连续映射.

关于连续映射,有下面的定理.

定理 1.7.4 对于映射 $f:(X,\mathscr{T}) \to (Y,\tau)$,下列四个条件等价:

(1)f 是连续映射;

(2)Y 中每个开集的原像都是 X 中的开集;

(3)Y 中每个闭集的原像都是 X 中的闭集;

(4)$\forall A \subset X, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

定理 1.7.5 若 $f:(X,\mathscr{T}) \to (Y,\tau)$在点 $x_0 \in X$ 连续,则对 X 中任意收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$,$\{f(x_n)\}_{n \geqslant 1}$在 Y 中收敛于$f(x_0)$.

注 与在距离空间中不同,此定理的逆命题不真.

定理 1.7.6 两个连续映射的复合映射是连续映射.

定义 1.7.9 若 $f:(X,\mathscr{T}) \to (Y,\tau)$是连续的双射,且其逆映射 $f^{-1}:(Y,\tau) \to (X,\mathscr{T})$也连续,则称 f 为 X 到 Y 的一个拓扑映射,或同胚.若存在一个从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的拓扑映射,则称 X 与 Y 是同胚的,记为 $X \cong Y$.拓扑空间或其子集等在拓扑映射下保持不变的性质,称为拓扑性质.

例如,距离空间中一个点集是否是开集、闭集、紧集或一个点列是否收敛等都是拓扑性质.

一个空间或其中的一个子集是否连通也是一种拓扑性质,连通的定义如下.

定义 1.7.10 拓扑空间 X 中若存在两个不交非空开集 U,V,使得 $X = U \cup V$,则称 X 是不连通的;否则称 X 是连通的.若拓扑空间 X 的子集 A 作为 X 的子空间是不连通的,则称 A 是拓扑空间 X 中的一个不连通子集;否则称 A 是连通的.若拓扑空间 X 的不连通子集 A 不包含 X 中任何含有多于一个元素的连通子集,则称 A 是完全不连通的.

例如,按通常距离 $\mathbf{R}$ 中的任一区间是连通的,而著名的 Cantor 三分集显然是完全不连通的.

第 2 章　非线性泛函分析基础

非线性泛函分析是无限维 Banach 空间上的非线性分析，主要研究对象是无限维空间上的非线性算子. 因为无限维赋范线性空间具有很多不同的拓扑，如强拓扑、弱拓扑以及弱* 拓扑等，从而能导出许多不同的连续性概念. 在研究和处理各类具体问题时，采用适当的连续性概念常会带来很大的方便. 本章 2.1 主要介绍几种常见的连续性及它们之间的联系.

由于无限维赋范线性空间缺乏局部紧性，需要对非线性映射增加适当的限制方能使它们具有与有限维空间上的连续映射的性质相近的性质，映射的全连续性就是这样的一种限制. 2.2介绍全连续映射及其基本性质.

本章 2.3 介绍非线性映射的两种微分，它们分别是数学分析中全微分和方向导数在抽象空间上的推广，其中也要介绍抽象函数(即自变量为实数，取值于实 Banach 空间中的算子)的 Riemann 积分，它在研究非线性映射的高阶微分时有用. 一般而言，一个非线性映射在某点附近是否一一的或映上的，可以由它的各阶导映射在该点处的性质来刻画.

在 2.4 和 2.5 中，分别介绍无限维空间上的隐函数定理和反函数定理以及 Banach 空间中常微分方程初值问题的局部可解性和解的极大存在区间等基本内容.

2.1　非线性映射的连续性与有界性

除特别声明，本节总假定 X, Y 为实赋范线性空间，并以 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$ 表示定义域 $\mathscr{D}(T)$在 X 中、值域 $\mathscr{R}(T)$在 Y 中的算子 T. 特别地，$T:X\to Y$ 表示算子 T 的定义域 $\mathscr{D}(T)=X$.

定义 2.1.1　设 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$,

(1)设 x_0 是 $\mathscr{D}(T)$的内点，称 T 在 x_0 局部有界，如果存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$使

$$\sup_{x\in U(x_0)}\|Tx\|<+\infty;$$

(2)设 Ω 是 $\mathscr{D}(T)$内部的一个子集，称 T 在 Ω 上局部有界，如果 T 在 Ω 中任一点局部有界；

(3)称 T 在 $\Omega\subset\mathscr{D}(T)$上有界，如果 T 映 Ω 中任一有界集为 Y 中有界集.

我们知道，当 T 是线性算子时，其连续性与有界性是等价的，但有例子表明，当 T 非线性时，没有这种等价性.

我们以$\to$，$\xrightarrow{w}$，$\xrightarrow{w^*}$分别表示相应空间中的强收敛、弱收敛和弱* 收敛，它们可引出不同的连续性概念. 在研究具体问题时，许多算子常不具有较强的有界性或连续性，但却具有较弱的有界性或连续性.

定义 2.1.2　设 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$, $x_0\in\mathscr{D}(T)$.

(1)称 T 在 x_0 是次连续的(demicontinuous)，如果 $\forall\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，有

$$x_n\longrightarrow x_0\Rightarrow Tx_n\xrightarrow{w}Tx_0;$$

(2)称 T 在 x_0 是弱连续的(weakly continuous),如果 $\forall\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$,有

$$x_n\xrightarrow{\mathrm{w}}x_0\Rightarrow Tx_n\xrightarrow{\mathrm{w}}Tx_0;$$

(3)称 T 在 x_0 是强连续的(strongly continuous),如果 $\forall\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$,有

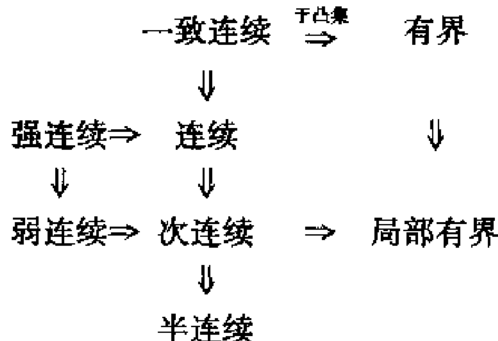
$$x_n\xrightarrow{\mathrm{w}}x_0\Rightarrow Tx_n\longrightarrow Tx_0;$$

(4)当 $Y=X^*$,称 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to X^*$ 在 x_0 是半连续的(hemicontinuous),如果 $\forall h\in X$,当 $t_n>0,x_0+t_nh\in\mathscr{D}(T)$时,有

$$t_n\longrightarrow 0\Rightarrow T(x_0+t_nh)\xrightarrow{\mathrm{w}^*}Tx_0.$$

类似地,当 T 在 $\Omega\subset\mathscr{D}(T)$上每一点都具有一种连续性时,则称 T 在 Ω 上具有该种连续性.

若 T 是线性算子,则以上两个定义给出的有界性和连续性都是等价的;若 T 是一般算子,但 X,Y 都是有限维的,则弱连续、次连续、强连续都与连续相互等价;在更一般的情况下,这些概念之间有如下关系:



但我们略去这部分的讨论. 在第3章变分法的讨论中,将考虑泛函这种特殊算子在某类集上的有界和达到极值的问题,从而要进一步地讨论它的弱连续性并且用到空间的一些弱拓扑概念.

2.2　全连续映射

定义 2.2.1　设 X 为赋范线性空间,$D\subset X$,称映射 $F:D\to Y$ 为紧映射,如果 F 将 D 中的任何有界集 A 映成 Y 中的列紧集. 如果 F 还是连续的,则称 F 是 D 上的全连续映射(或紧连续映射).

全连续映射是一类最重要、应用最广泛的非线性映射,它是从具体的偏微分方程和积分方程的研究中归纳出来的.

紧映射的不动点相应于方程的解,对此类不动点问题的研究,已经有了十分丰富的理论成果.

定理 2.2.1　设 X,Y 是赋范线性空间,$D\subset X$,Y 完备,且 $F_n:D\to Y,n=1,2,\cdots$是一列全连续映射. 如果对于 D 中任何有界集 A 及任何 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n,m\geqslant N$ 时有

$$\sup_{x\in A}\|F_n(x)-F_m(x)\|<\varepsilon,\tag{2.2.1}$$

则存在全连续映射 $F:D\to Y$,,使得当 $n\to\infty$时,$\|F_n(x)-F(x)\|$在 D 中每个有界集上都一致趋于零.

证明　首先由式(2.2.1)可知，$\forall x\in D$，$\{F_n(x)\}$是 Y 中的 Cauchy 列，因 Y 完备，$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$在 Y 中存在，令 $F:D\to Y$ 定义为：$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$，再利用式(2.2.1)得：当 $n\to\infty$时，$\|F_n(x)-F(x)\|\to 0$关于 $x\in A$ 一致地成立.

由此可知，F 为D 上的连续映射.

再证 F 是紧映射. 设 A 是D 中任一有界集，为证 $F(A)$是 Y 中的列紧集，只需证明 $\forall\varepsilon>0$，$F(A)$在 Y 中有有限的ε 网. 由于 F_n 在A 上一致地收敛到F，可取定 $n_0\in\mathbf{N}$，使得

$$\sup_{x\in A}\|F_{n_0}(x)-F(x)\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

又因 F_{n_0} 是紧映射，$F_{n_0}(A)$是 Y 中的列紧集，从而具有有限的$\frac{\varepsilon}{2}$网，故不难得到 $F(A)$具有有限的 ε 网. 证毕.

定理 2.2.2　设 X,Y 是赋范线性空间，M 是X 中的有界闭集，$F:M\to Y$ 连续，则 F 是全连续映射的必要条件是对任何$\varepsilon>0$，存在 Y 的有限维子空间 Y_n 和有界连续映射$F_n:M\to Y_n$，使得

$$\sup_{x\in M}\|F(x)-F_n(x)\|\leqslant\varepsilon.$$

证明　由 $F(M)$在 Y 中列紧，存在有限的 ε 网，即存在 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in Y$，使得$\forall y\in F(M)$，都有某个 y_k，$1\leqslant k\leqslant m$，满足 $\|y-y_k\|<\varepsilon$.

令 $Y_n=\mathrm{span}\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，即 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 张成的n 维线性子空间($n\leqslant m$)，并记

$$B_i=B(y_i;\varepsilon)=\{y\in Y:\|y-y_i\|<\varepsilon\},\ i=1,2,\cdots,m.$$

采用记号 $\mathrm{dist}(x,A)$来表示元素 x 到子集A 的距离(定义为 $\inf\{d(x,y):y\in A\}$)，构造函数 $f_i:Y\to\mathbf{R}$ 为

$$f_i(y)=\mathrm{dist}(y,Y-B_i),\ i=1,2,\cdots,m,$$

再进行映射 $F_n:M\to Y_n$，其定义为

$$F_n(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)y_i,\ \forall x\in M,$$

其中

$$a_i(x)=f_i(F(x))\Big/\sum_{j=1}^{m}f_j(F(x)),$$

则不难得出 F_n 有意义且连续. 又由于当 $\|F(x)-y_i\|\geqslant\varepsilon$ 时$f_i(F(x))=0$，$i=1,2,\cdots,m$，故

$$\begin{aligned}\|F(x)-F_n(x)\|&=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m}f_j(F(x))}\left\|\sum_{i=1}^{m}f_i(F(x))(F(x)-y_i)\right\|\\&\leqslant\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m}f_j(F(x))}\sum_{i=1}^{m}f_i(F(x))\|F(x)-y_i\|\\&<\varepsilon,\ \forall x\in M,\end{aligned}$$

从而

$$\sup_{x\in M}\|F(x)-F_n(x)\|\leqslant\varepsilon.$$

证毕.

容易看出,当 Y 完备时,根据定理2.2.1,定理2.2.2中的必要条件也是充分的.

例2.2.1 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个有界闭区域(即一个有界连通开集的闭包),$k(x,y,u)$ 是 $\Omega\times\Omega\times\mathbf{R}$ 上的连续函数,则积分算子

$$K:C(\Omega)\to C(\Omega),(K\varphi)(x)=\int_\Omega k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y,$$

是全连续算子.

证明 设 B 是 $C(\Omega)$ 中的一个有界集,则存在常数 $C_0>0$,使得 $\forall\varphi\in B$,有

$$\|\varphi\|=\max_{x\in\Omega}|\varphi(x)|\leqslant C_0.$$

记 $M=\max\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ \|u\|\leqslant C_0}}|k(x,y,u)|$,则

$$|(K\varphi)(x)|=\left|\int_\Omega k(x,y,\varphi(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant M\mu(\Omega),\ \forall\varphi\in B\ (\mu(\Omega)\text{表示 }\Omega\text{ 的 L 测度}),$$

因此 $K(B)$ 中的元素在 Ω 上一致有界,根据 Arzela-Ascoli 定理,为了证明 $K(B)$ 在 $C(\Omega)$ 中列紧,只要再证 $K(B)$ 中所有函数具有等度连续性即可.现对任意 $\varepsilon>0$,由于 $k(x,y,u)$ 在 $\Omega\times\Omega\times[-C_0,C_0]$ 上一致连续,故存在 $\delta>0$,使得当 $x_1,x_2\in\Omega,|x_1-x_2|<\delta$ 时,恒有

$$|k(x_1,y,u)-k(x_2,y,u)|<\frac{\varepsilon}{1+\mu(\Omega)},\ \forall y\in\Omega,u\in[-C_0,C_0],$$

于是对任何 $\varphi\in B$,有

$$|(K\varphi)(x_1)-(K\varphi)(x_2)|=\left|\int_\Omega[k(x_1,y,\varphi(y))-k(x_2,y,\varphi(y))]\mathrm{d}y\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{1+\mu(\Omega)}\cdot\mu(\Omega)<\varepsilon.$$

此即 $K(B)$ 具有等度连续性.

最后再证 K 的连续性,设 $\{\varphi_n\}$ 在 $C(\Omega)$ 中收敛于 φ_0,则 $\{\varphi_n\}$ 在 $C(\Omega)$ 中有界.因此,存在常数 $C_1>0$,使得当 $x\in\Omega$ 时,有 $|\varphi_n(x)|\leqslant C_1,n=0,1,2,\cdots$.对任意 $\varepsilon>0$,由 $k(x,y,u)$ 在 $\Omega\times\Omega\times[-C_1,C_1]$ 上的一致连续性知,存在 $\delta>0$,使得当 $u_1,u_2\in[-C_1,C_1]$,且 $|u_1-u_2|<\delta$ 时,恒有

$$|k(x,y,u_1)-k(x,y,u_2)|<\frac{\varepsilon}{1+\mu(\Omega)},\ \forall x,y\in\Omega,$$

由于 $\{\varphi_n\}$ 在 $C(\Omega)$ 中收敛于 φ_0,故存在正整数 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,恒有

$$\|\varphi_n-\varphi_0\|_{C(\Omega)}<\delta,$$

于是

$$|(K\varphi_n)(x)-(K\varphi_0)(x)|\leqslant\int_\Omega|k(x,y,\varphi_n(y))-k(x,y,\varphi_0(y))|\mathrm{d}y$$

$$<\frac{\varepsilon}{1+\mu(\Omega)}\cdot\mu(\Omega)<\varepsilon,\ \forall x\in\Omega,$$

从而 $\|K\varphi_n-K\varphi_0\|_{C(\Omega)}\leqslant\varepsilon$,即 K 在 $C(\Omega)$ 上连续.证毕.

2.3 抽象函数的积分与非线性映射的微分

2.3.1 抽象函数的积分

我们先把数学分析中 Riemann 积分的概念推广到抽象函数上去.

定义 2.3.1 设 X 是一个实 Banach 空间, $D\subset\mathbf{R}$. 则算子 $x:D\to X$, 即自变量 t 取实数而函数值取于实 Banach 空间 X 中的映射 $x(t)$, 称为一个抽象函数, 并常记为 $x(t):D\to X$.

定义 2.3.2 设 $x(t):[a,b]\to X$. 进行 $[a,b]$ 上任意分划 $P: a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$, 并构成 Riemann 和

$$\sigma(P)=\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, $\xi_i\in[t_i-1,t_i]$ 任意, $i=1,2,\cdots,n$. 记 $\lambda(P)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i$, 若当 $\lambda(P)\to 0$ 时, $\sigma(P)$ 在 X 中趋于某极限 I, 即存在 $I\in X$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使当 $\lambda(P)<\delta$ 时, 不论 ξ_i 怎么取法, 恒有 $\|\sigma(P)-I\|<\varepsilon$, 则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积(或 R－可积), 称 I 为 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分(或 R－积分), 记为

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$I=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i.$$

定理 2.3.1 若 $x(t):[a,b]\to X$ 连续, 则 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上 R－可积.

证明 由于 $x(t)$ 连续, 类似于数学分析中 Cantor 定理的证明, 可以证得 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使当 $t_1,t_2\in[a,b]$, 且 $|t_1-t_2|<\delta$ 时, 有

$$\|x(t_1)-x(t_2)\|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{2.3.1}$$

设 P 是 $[a,b]$ 的一个分划, 且 $\lambda(P)<\delta$, 而 $\tilde{P}$ 是 P 的加细, 即在 P 的基础上添加一些分点形成的分划, 则 $\lambda(\tilde{P})\leqslant\lambda(P)<\delta$, 且从式(2.3.1)易得

$$\|\sigma(P)-\sigma(\tilde{P})\|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.3.2}$$

现作 $[a,b]$ 上一列分划 P_n, $n=1,2,\cdots$, 其中 P_{n+1} 是 P_n 的加细, 并且 $\lambda(P_n)\to 0$, $n\to\infty$. 由式(2.3.2)知 $\{\sigma(P_n)\}$ 是 X 中 Cauchy 列, 因为 X 是完备的, 故存在 $I\in X$, 使 $\sigma(P_n)\to I$, $n\to\infty$. 于是存在正整数 N, 当 $n\geqslant N$ 时, 有 $\lambda(P_n)<\delta$ 及

$$\|\sigma(P_n)-I\|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.3.3}$$

若 P 是 $[a,b]$ 上任一满足 $\lambda(P)<\delta$ 的分划, 记 P^* 是 P 与 P_N 合成的 $[a,b]$ 的分划, 则 P^* 是 P 的加细, 故由式(2.3.2)和(2.3.3)有

$$\|\sigma(P)-I\|\leqslant\|\sigma(P)-\sigma(P^*)\|+\|\sigma(P^*)-\sigma(P_N)\|+\|\sigma(P_N)-I\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

故 $x(t)$在$[a,b]$上 R-可积.证毕.

由定义 2.3.2 和定理 2.3.1 可得下述结果.

推论 2.3.1 设 $x_1(t),x_2(t),x(t):[a,b]\to X$ 都连续,α,β 为实数,$f\in X^*$,则有

(1)$\int_a^b(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b x_1(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b x_2(t)\mathrm{d}t$;

(2)$f(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t)=\int_a^b f(x(t))\mathrm{d}t$.

命题 2.3.1 若 $x(t):[a,b]\to X$ 连续,则

$$\left\|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b\|x(t)\|\mathrm{d}t\leqslant(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}\|x(t)\|.$$

证明 由于 $x(t):[a,b]\to X$ 连续,所以$\int_a^b\|x(t)\|\mathrm{d}t$ 和$\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|x(t)\|$ 均有意义.设 P 为对$[a,b]$的任一分划:$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$,则

$$\|\sigma(P)\|=\left\|\sum_{i=1}^n x(\xi_i)\Delta t_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^n\|x(\xi_i)\|\Delta t_i,$$

令 $\lambda(P)\to0$,则有

$$\left\|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b\|x(t)\|\mathrm{d}t\leqslant(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}\|x(t)\|.$$

证毕.

命题 2.3.2 若 $x_n(t):[a,b]\to X(n=1,2,\cdots)$皆连续,且$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $x(t)$,则 $x(t):[a,b]\to X$ 连续,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t.$$

证明 由条件立即得出 $x(t):[a,b]\to X$ 连续,故由命题 2.3.1 有

$$\left\|\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}t-\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right\|=\left\|\int_a^b(x_n(t)-x(t))\mathrm{d}t\right\|\leqslant(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}\|x_n(t)-x(t)\|.$$

由于$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $x(t)$,故当 $n\to\infty$时,

$$(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}\|x_n(t)-x(t)\|\to0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t.$$

证毕.

定义 2.3.3 设 $x(t):[a,b]\to X$,$t_0\in[a,b]$.若存在 $y_0\in X$,使

$$\lim_{\Delta t\to0}\left\|\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-y_0\right\|=0,$$

则称 $x(t)$在点 t_0 可微,称 y_0 为 $x(t)$在点 t_0 的导数,记为$\frac{\mathrm{d}x(t_0)}{\mathrm{d}t}$或$x'(t_0)$,即

$$x'(t_0)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=y_0.$$

若 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 中每一点 t 均可微(在点 a 右可微,在点 b 左可微,即 $\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\frac{x(a+\Delta t)-x(a)}{\Delta t}$ 和 $\lim\limits_{\Delta t\to 0^-}\frac{x(b+\Delta t)-x(b)}{\Delta t}$ 都存在),则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微,这时导函数 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}:[a,b]\to X$ 也是一个抽象函数.

命题 2.3.3　若 $x(t):[a,b]\to X$ 连续,则 $y(t)\equiv\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\,(t\in[a,b])$ 在 $[a,b]$ 上可微,且 $y'(t)=x(t)$.

证明　设 $t\in[a,b]$, $\Delta t>0$ 且 $t+\Delta t\in[a,b]$,则有

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}-x(t)\right\| &= \left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}x(s)\mathrm{d}s-x(t)\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}[x(s)-x(t)]\mathrm{d}s\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\|[x(s)-x(t)]\|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \max_{t\leqslant s\leqslant t+\Delta t}\|x(s)-x(t)\|\to 0\ (\Delta t\to 0).
\end{aligned}
$$

当 $\Delta t<0$ 时,类似可得同样的结果,故 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微且 $y'(t)=x(t)$. 证毕.

数学分析中牛顿—莱布尼茨公式也可推广到这种积分上来.

定理 2.3.2　若 $x(t):[a,b]\to X$,在 $[a,b]$ 上具有连续的导函数 $x'(t)$,则

$$\int_c^d x'(t)\mathrm{d}t=x(d)-x(c),$$

这里 $[c,d]\subset[a,b]$ 任意.

证明　$\forall f\in X^*$,由推论 2.3.1 有

$$f\left(\int_c^d\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)=\int_c^d f\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t. \tag{2.3.4}$$

记 $g(t)=f(x(t))$,则 $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上的实函数,且 $g'(t)=f(x'(t))$, $t\in[a,b]$. 由于 $x'(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故 $g'(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而由数学分析中牛顿—莱布尼茨公式,有

$$\int_c^d g'(t)\mathrm{d}t=g(d)-g(c). \tag{2.3.5}$$

由式(2.3.4)和(2.3.5)以及 f 的线性性质,有

$$f\left(\int_c^d x'(t)\mathrm{d}t\right)=f(x(d))-f(x(c))=f(x(d)-x(c)),$$

再由 $f\in X^*$ 的任意性,得

$$\int_c^d x'(t)\mathrm{d}t=x(d)-x(c).$$

证毕.

2.3.2　非线性映射的微分

下面我们先介绍 Fréchet 意义下的微分,它是数学分析中全微分概念的推广,然后再介绍 Gâteaux 意义下的微分,它是数学分析中方向导数概念的推广,后者所要求的条件较弱些,对于泛函用起来很方便.

设 X, Y 均为实 Banach 空间.

定义 2.3.4 设 D 为 X 中的开集. 算子 $f: D \to Y$ 称为在点 $x_0 \in D$ 是 Fréchet 可微(F-可微)的,是指存在 $A \in \mathscr{B}(X, Y)$,使得 $h \in X, x_0 + h \in D$ 时,有

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \omega(x_0, h), \tag{2.3.6}$$

其中 $\omega(x_0, h) = o(\| h \|)$,即

$$\lim_{\| h \| \to 0} \frac{\| \omega(x_0, h) \|}{\| h \|} = 0. \tag{2.3.7}$$

这时称 Ah 为 f 在 x_0 处的 F-微分,记为 $\mathrm{d}f(x_0)h$ 或 $f'(x_0)h$. 算子 A 称为 f 在 x_0 点的 F-导算子(导数),记为 $\mathrm{d}f(x_0)$ 或 $f'(x_0)$. 若 f 在 D 内每点都 F-可微,则称 f 在 D 内 F-可微,这时 $f'(\cdot): D \to \mathscr{B}(X, Y)$,常记成 $f'(x)$ 或 f',称为 f 在 D 上的 F-导算子(导数). 若 F-导数 f' 在点 x_0 处连续,则称 f 在点 x_0 处连续 F-可微.

由此定义不难得出下面的推论.

推论 2.3.2

(1)F-导算子是唯一的,即若还有 $\tilde{A} \in \mathscr{B}(X, Y)$ 也满足(2.3.6)和(2.3.7)两式,则必有 $A = \tilde{A}$;

(2)求导运算是线性的,即若 $f_1, f_2: D \to Y$ 均在点 $x \in D$ 处 F-可微,c_1, c_2 是实常数,则 $c_1 f_1 + c_2 f_2$ 也在点 x 处 F-可微,并且

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)'(x) = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x);$$

(3)常值算子的 F-导数是零算子 0,即若 $\forall x \in X$ 都有 $f(x) \equiv y_0 \in Y$,则有

$$f'(x) = 0, \forall x \in X.$$

(4)有界线性算子的 F-导数为常映射,即若 $f(x) = Ax, A \in \mathscr{B}(X, Y)$,则有

$$f'(x) = A, \forall x \in X.$$

例 2.3.1 设 $X = \mathbf{R}^n, Y = \mathbf{R}^m, n, m \in \mathbf{N}$. 由 m 个 n 元函数

$$f_i(x_1, \cdots, x_n), i = 1, 2, \cdots, m$$

确定一个算子 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 如下(上标 T 表示转置):

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))^{\mathrm{T}}, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n,$$

再设每个 f_i 都在 x_0 的某邻域内具有连续的一阶偏导数,则对 $h \in \mathbf{R}^n$,当 $\| h \|$ 充分小时,由中值公式有

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= (f_1(x_0 + h) - f_1(x_0), \cdots, f_m(x_0 + h) - f_m(x))^{\mathrm{T}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \bigg|_{x_0 + \theta_1 h} \cdot h_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \bigg|_{x_0 + \theta_m h} \cdot h_i \right)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

故 f 在 x_0 处 F-可微,且 $f'(x_0)$ 由下式表示:

$$f'(x_0)h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x = x_0} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix},$$

即 $f'(x_0)$ 可认为是 f 在 x_0 处的 Jacobi 矩阵.

推论 2.3.3　设 $f:D\to Y$ 在点 $x_0\in D$ 处 F－可微，则 f 在点 x_0 处连续.

证明　由定义有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\omega(x_0,h),$$

其中 $A\in\mathscr{B}(X,Y)$，$x_0+h\in D$，$\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$，从而有

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|\leqslant\|Ah\|+\|\omega(x_0,h)\|\to 0(\text{当}\|h\|\to 0),$$

故 f 在点 x_0 处连续. 证毕.

定理 2.3.3(链式法则)　设 X,Y 和 Z 均为实 Banach 空间，开集 $D\subset X$，开集 $H\subset Y$，算子 $f:D\to Y$，算子 $g:H\to Z$，且 $f(D)\subset H$. 若 f 在点 $x_0\in D$ 处 F－可微，g 在点 $f(x_0)=y_0\in H$ 处 F－可微，则复合算子 gf 在点 x_0 处 F－可微，并且

$$(gf)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0). \tag{2.3.8}$$

注　等式(2.3.8)的右端是算子的复合而非乘积.

证明　因 f 在点 x_0 处，g 在点 y_0 处 F－可微，故 $\exists f'(x_0)\in\mathscr{B}(X,Y)$，$g'(y_0)\in\mathscr{B}(Y,Z)$，使得 $h\in X$，$x_0+h\in D$，$k\in Y$，$y_0+k\in H$ 时

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\omega(x_0,h), \tag{2.3.9}$$

$$g(y_0+k)-g(y_0)=g'(y_0)k+\tilde{\omega}(y_0,k), \tag{2.3.10}$$

其中 $\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$，$\tilde{\omega}(y_0,k)=o(\|k\|)$. 在式(2.3.10)中取 $k=f(x_0+h)-f(x_0)$，则有

$$(gf)(x_0+h)-(gf)(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)h+\omega_2(x_0,h),$$

其中

$$\omega_2(x_0,h)=g'(y_0)\omega(x_0,h)+\tilde{\omega}(y_0,k),$$

且

$$\|\omega_2(x_0,h)\|\,\|h\|^{-1}\leqslant\|g'(y_0)\|\,\|\omega(x_0,h)\|\,\|h\|^{-1}+\|\tilde{\omega}(y_0,k)\|\,\|k\|^{-1}(\|k\|\,\|h\|^{-1})$$
$$\to 0(\|h\|\to 0).$$

从而依定义可知：复合算子 gf 在 x_0 处 F－可微，并且式(2.3.8)成立. 证毕.

定义 2.3.5　称 $D\subset X$ 为一个 n 开集，若 $\forall x_0\in D$ 及 $\forall h_1,h_2,\cdots,h_n\in X$，$\exists\delta>0$，使得 $|t_i|<\delta$，$i=1,2,\cdots,n$ 时，有 $x_0+\sum\limits_{i=1}^{n}t_ih_i\in D$.

定义 2.3.6　设 D 为 X 中一个 1 开集，$x_0\in X$，且 $f:D\to Y$. 若对 $h\in X$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \tag{2.3.11}$$

存在于 Y，则称此极限为 f 在 x_0 处沿方向 h 的 G－微分，并记其为 $\mathrm{D}[f(x_0)h]$ 或 $\mathrm{d}f(x_0;h)$. 若对任一 $h\in X$，$\mathrm{D}[f(x_0)h]$ 都存在，则称 f 在点 x_0 处 Gâteaux 可微或 G－可微. 若还存在 $g\in\mathscr{B}(X,Y)$，使得 G－微分 $\mathrm{D}[f(x_0)h]=gh$，$\forall h\in X$，则称 f 在 x_0 处具有有界线性的 G－微分或称 f 在 x_0 处是 G－可导的，称 g 为 f 在 x_0 处的 G－导算子(或 G－导数)，并记 $\mathrm{D}f(x_0)=g$. 若 f 在 D 中任点 x 处具有有界线性的 G－微分，则称 f 在 D 上具有有界线性的 G－微分或称 f 在 D 上是 G－可导的，并称 $\mathrm{D}f(x)$，$x\in D$ 为 f 在 D 上的 G－导数.

定理 2.3.4　G－微分具有下述性质：

(1)设 f 在 $x_0\in D$ 处沿 h 方向G-可微,则对任何 $y^*\in Y^*$,函数 $\varphi(t)=y^*(f(x_0+th))$ 在 $t=0$处可微,并且 $\varphi'(0)=y^*(\mathrm{D}[f(x_0)h])$.又若 f 在线段$L=\{x_0+th\mid t\in[0,1]\}$的每一点处沿 h 方向G-可微,则 $\varphi(t)$在$[0,1]$上可微,并且 $\varphi'(t)=y^*(\mathrm{D}[f(x_0+th)h])$;

(2)若 f 在线段L 上G-可微,则存在 $\tau\in[0,1]$,使得

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|\leqslant\|\mathrm{D}[f(x_0+\tau h)h]\|;$$

(3)(中值公式)设 Y 是 Banach空间,$\Psi(t)=\mathrm{D}[f(x_0+th)h]$在$[0,1]$上连续,则

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^1\Psi(t)\mathrm{d}t,$$

这里$\int_0^1\Psi(t)\mathrm{d}t$ 是连续的抽象函数 $\Psi(t)$的 Riemann 积分.

证明 (1)可以从定义直接推出,下面仅证(2)和(3).

(2)由 Hahn-Banach 定理的推论(推论 1.5.1),当 $f(x_0+h)\neq f(x_0)$,存在 $y^*\in Y^*$,$\|y^*\|=1$,使得

$$y^*(f(x_0+h)-f(x_0))=\|f(x_0+h)-f(x_0)\|.$$

仍记 $\varphi(t)=y^*(f(x_0+th))$,则由(1)和数学分析中的中值公式,有

$$\begin{aligned}\|f(x_0+h)-f(x_0)\|&=\varphi(1)-\varphi(0)\\&=\varphi'(\tau)(\text{某个 }\tau\in[0,1])\\&=y^*(\mathrm{D}[f(x_0+\tau h)h])\\&\leqslant\|\mathrm{D}[f(x_0+\tau h)h]\|,\end{aligned}$$

当 $f(x_0+h)=f(x_0)$,显然也成立

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|\leqslant\|\mathrm{D}[f(x_0+\tau h)h]\|.$$

(3)任取 $y^*\in Y^*$,根据假定,函数 $\varphi(t)=y^*(f(x_0+th))$在$[0,1]$上可微,并且$\varphi'(t)=y^*(\Psi(t))$在$[0,1]$上连续,由微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}y^*(f(x_0+h)-f(x_0))&=\varphi(1)-\varphi(0)\\&=\int_0^1\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1y^*(\Psi(t))\mathrm{d}t\\&=y^*\left(\int_0^1\Psi(t)\mathrm{d}t\right),\end{aligned}$$

再由 $y^*\in Y^*$的任意性,即得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^1\Psi(t)\mathrm{d}t.$$

证毕.

下面的定理表明了F-可微和G-可微的关系.

定理 2.3.5 设 $f:D\to Y$,在点 $x_0\in D$ 处F-可微,则 f 在点 x_0 处具有有界线性的G-微分,且

$$\mathrm{D}[f(x_0)h]=f'(x_0)h.$$

证明 因 f 在点x_0 处F-可微,依定义知$\exists f'(x_0)\in\mathscr{B}(X,Y)$,使得 $h\in X,x_0+h\in D$ 时

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\omega(x_0,h),$$

其中 $\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$,故有

$$f(x_0+th)-f(x_0)=f'(x_0)th+\omega(x_0,th).$$

当 $h\neq\theta$ 时,因

$$\lim_{t\to0}\left\|\frac{\omega(x_0,th)}{t}\right\|=\lim_{t\to0}\|h\|\frac{\|\omega(x_0,th)\|}{\|th\|}=0,$$

有

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=f'(x_0)h,$$

故依定义,f 在点 x_0 处具有有界线性的 G-微分,并且 $\mathrm{D}[f(x_0)h]=f'(x_0)h$. 证毕.

定理 2.3.6　(M. M. Vainberg, 1952)设 $D\subset X$ 是凸开集(即 D 是开集且满足: $\forall x,y\in D$ 及 $\tau\in[0,1]$, $\tau x+(1-\tau)y\in D$), $f:D\to Y$ 在 D 具有有界线性的 G-微分,且其 G-导算子 $\mathrm{D}f(x)$ 在 D 上连续,则 f 在 D 上 F-可微,且 $f'(x)=\mathrm{D}f(x), x\in D$.

证明　$\forall x_0\in D$, $\exists x_0$ 的球形邻域 $B=\{x\in X:\|x-x_0\|<r\}\subset D$. 设 $h\in X$, $x_0+h\in B$,记 $\omega(x_0,h)=f(x_0+h)-f(x_0)-\mathrm{D}f(x_0)h$,依定义只需证明 $\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$ 即得结论. 若 $\forall x_0+h\in B$ 都有 $\omega(x_0,h)=0$,则结论已得. 现设对某 $x_0+h\in B$, $\omega(x_0,h)\neq0$,则由推论 1.5.1 知 $\exists y^*\in Y^*$,使 $\|y^*\|=1$,且

$$y^*(\omega(x_0,h))=\|\omega(x_0,h)\|.$$

由定理 2.3.4 之(1)有

$$\begin{aligned}\|\omega(x_0,h)\|&=y^*(f(x_0+h)-f(x_0)-\mathrm{D}f(x_0)h)\\&=y^*(f(x_0+h)-f(x_0))-y^*(\mathrm{D}f(x_0)h)\\&=y^*(\mathrm{D}f(x_0+\tau h)h)-y^*(\mathrm{D}f(x_0)h)(\text{某个 }\tau\in[0,1])\\&\leqslant\|y^*\|\,\|\mathrm{D}f(x_0+\tau h)-\mathrm{D}f(x_0)\|\,\|h\|,\end{aligned}$$

故由 $\mathrm{D}f(x)$ 在 D 上连续,易得 $\|\omega(x_0,h)\|=o(\|h\|)$. 证毕.

2.3.3　非线性算子的泰勒公式

本节最后一部分内容是将数学分析中泰勒(Taylor)公式推广到非线性算子上,为此要先讨论高阶 F-导数.

定义 2.3.7　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 Y 均为实 Banach 空间,称算子 $f:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y$ 是 n 线性算子,如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对每个变元 $x_i\in X_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 都是线性的,若还存在常数 $M>0$ 使得

$$\|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|\leqslant M\|x_1\|\,\|x_2\|\cdots\|x_n\|$$

对任意的 $x_i\in X_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 都成立,则称算子 f 为有界 n 线性算子,并称

$$\|f\|=\sup_{\|x_i\|\leqslant1,i=1,2,\cdots,n}\|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|$$

为 f 的范数.

记 $\mathscr{B}(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,Y)$ 为 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 到 Y 的有界 n 线性算子的全体,则按通常的算子加法和数乘以及范数 $\|f\|$,用归纳法可证明 $\mathscr{B}(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,Y)$ 构成一个 Banach 空间. 若 $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$,记 $\mathscr{B}_1(X,Y)=\mathscr{B}(X,Y)$, $\mathscr{B}_2(X,Y)=\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(X,Y))$,

$\cdots,\mathscr{B}_n(X,Y)=\mathscr{B}(X,\mathscr{B}_{n-1}(X,Y))$，则可以用数学归纳法证得 $\mathscr{B}(\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n次},Y)$与 $\mathscr{B}_n(X,Y)$是等距同构的，因此在一定意义上这两个空间可不加区别. 下面我们仅证 $\mathscr{B}(X\times X,Y)$与$\mathscr{B}_2(X,Y)$亦即 $\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(X,Y))$等距同构，整个数学归纳法证明不难在此基础上完成.

$\forall f\in\mathscr{B}(X\times X,Y)$，$\forall x\in X$，令 $f_x=f(x,\cdot):X\to Y$ 为由$f_x(y)=f(x,y)(\forall y\in X)$定义的映射，则 $f_x\in\mathscr{B}(X,Y)$.

$\forall x\in X$，令 $g_f(x)=f_x$，则易见 $g_f\in L(X,\mathscr{B}(X,Y))$，且有

$$\|g_f(x)\|=\|f_x\|=\sup_{\|y\|\leqslant1}\|f(x,y)\|\leqslant\|f\|\,\|x\|,\ \forall x\in X,$$

故 $g_f(x)\in\mathscr{B}_2(X,Y)$，且 $\|g_f\|\leqslant\|f\|$.

现令 $\mathscr{B}(X\times X,Y)$到 $\mathscr{B}_2(X,Y)$的映射 σ 为$\sigma(f)=g_f$，$\forall f\in\mathscr{B}(X\times X,Y)$，则易见 σ 是一一映射. $\forall g\in\mathscr{B}_2(X,Y)$，令 $f_g(x,y)=(g(x))(y)$，$\forall x,y\in X$，，则 f_g 是$X\times X$ 到Y 的双线性算子，并且有

$$\|f_g(x,y)\|=\|(g(x))(y)\|\leqslant\|g(x)\|\,\|(y)\|\leqslant\|g\|\,\|x\|\,\|y\|,$$

从而 $f_g\in\mathscr{B}(X\times X,Y)$且 $\|f_g\|\leqslant\|g\|$. 显然 $\sigma(f_g)=g$，因而 σ 又是映上的映射，故 σ 是 $\mathscr{B}(X\times X,Y)$与 $\mathscr{B}_2(X,Y)$间的一个一一对应.

另一方面，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，$f,\tilde{f}\in\mathscr{B}(X\times X,Y)$，有

$$\sigma(\lambda f)=\lambda g_f=\lambda\sigma(f),$$

$$\sigma(f+\tilde{f})=g+\tilde{g}=\sigma(f)+\sigma(\tilde{f}),$$

故 $\mathscr{B}(X\times X,Y)$与 $\mathscr{B}_2(X,Y)$同构，且据前可得 $\|f\|=\|\sigma(f)\|$，于是证得 $\mathscr{B}(X\times X,Y)$与 $\mathscr{B}_2(X,Y)$等距同构.

定义 2.3.8 设 X 和 Y 均为实 Banach 空间，$D\subset X$ 是开集，若算子 $f:D\to Y$ 在D 上 F－可微，且导算子 $f':D\to\mathscr{B}(X,Y)$在点 $x_0\in D$ 是 F－可微的，则称算子 f 在点 x_0 是二阶 F－可微的，这时称 f'在点x_0 处的 F－导算子$(f')'(x_0)$为 f 在点x_0 处的二阶 F－导算子，记为 $f''(x_0)$. 若 $f':D\to\mathscr{B}_1(X,Y)$在 D 上 F－可微且其 F－导算子 $f'':D\to\mathscr{B}_2(X,Y)$在点 x_0 是 F－可微的，则称算子 f 在点 x_0 是三阶 F－可微的，这时称 f''在点 x_0 处的 F－导算子 $(f'')'(x_0)$为 f 在x_0 点处的三阶 F－导算子，记为 $f'''(x_0)$或 $f^{(3)}(x_0)$. 同样，一般地有：若 $f^{(n-2)}:D\to\mathscr{B}_{n-2}(X,Y)$在 D 上 F－可微，且其导算子 $f^{(n-1)}:D\to\mathscr{B}_{n-1}(X,Y)$在点 x_0 处是 F－可微的，则称 f 在x_0 处是 n 阶 F－可微的，这时称 $f^{(n-1)}$在点 x_0 处的 F－导算子为 f 在点 x_0 处的 n 阶 F－导算子，记为 $f^{(n)}(x_0)$.

根据定义有 $f'(x_0)\in\mathscr{B}_1(X,Y)$，$\cdots$，$f^{(n)}(x_0)\in\mathscr{B}_n(X,Y)$，由 $\mathscr{B}_n(X,Y)$与 $\mathscr{B}(\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n次},Y)$ 等距同构，故可认为 $f^{(n)}(x_0)\in\mathscr{B}(\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n次},Y)$，并简记 $f^{(n)}(x_0)(\underbrace{h,\cdots,h}_{n个})$为 $f^{(n)}(x_0)h^n$，$n=1,2,\cdots$.

定理 2.3.7 设 $l=\{x\mid x=x_0+th,0\leqslant t\leqslant1\}$，其中 $x_0\in X$，$h\in X$ 取定值，$l\subset D$. 若泛函 $f:D\to\mathbf{R}$ 在 l 上是 $n+1$ 阶 F－可微的，则存在 $\theta\in(0,1)$，使下面的 Taylor 公式成立：

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2!}f''(x_0)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}.$$

证明　记 $g(t)=f(x_0+th), t\in[1,0]$,则由链式法则知 $g(t)$在$[0,1]$上 $n+1$ 阶可微,并且

$$g'(t)=f'(x_0+th)h, g''(t)=f''(x_0+th)h^2,\cdots,g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1},$$

由数学分析中函数的 Taylor 公式知,存在 $\theta\in(0,1)$,使得

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2!}g''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}g^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta),$$

于是得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}.$$

证毕.

定理 2.3.8　设 Ω 为 X 中的凸开集.若算子 $f:\Omega\to Y$ 在 Ω 内有连续的 $n+1$ 阶 F－导数 $f^{(n+1)}$,则对任意的 $x_0\in\Omega$ 及 $h\in X$,当 $x_0+h\in\Omega$ 时,下面的带积分余项的 Taylor 公式成立:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n+\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}\mathrm{d}t.$$

证明　记 $F(t)$为

$$F(t)=f(x_0+th)+(1-t)f'(x_0+th)h+\cdots+\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n)}(x_0+th)h^n,$$

对 $x_0\in\Omega$ 及 $h\in X$,当 $x_0+h\in\Omega$,因 Ω 是凸开集,加上 $f^{(n+1)}$在 Ω 上连续,故抽象函数 $F(t):[0,1]\to Y$在$[0,1]$上具有连续的导函数 $F'(t)$.

由定理 2.3.2 有

$$\int_0^1 F'(t)\mathrm{d}t=F(1)-F(0)=f(x_0+h)-\left[f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n\right],$$

而

$$\begin{aligned}F'(t)&=f'(x_0+th)h-f'(x_0+th)h+(1-t)f''(x_0+th)h^2-(1-t)f''(x_0+h)h^2\\&\quad+\cdots+\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}\\&=\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1},\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{1}{n!}(1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}\mathrm{d}t\\&=f(x_0+h)-\left[f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n\right],\end{aligned}$$

即带积分余项的 Taylor 公式成立.证毕.

2.4 隐函数定理及应用

2.4.1 隐函数定理

隐函数定理有许多重要的应用. 本节把此著名的定理从数学分析中的函数方程的情形推广到算子方程的情形.

设 X,Y 和 Z 均为实 Banach 空间, D 是 $X\times Y$ 中的开集, $F:D\to Z$. 与数学分析类似,也可以引入偏导数概念. 设 $(x_0,y_0)\in D$,若 $F(x,y_0)(F(x_0,y))$ 在点 x_0(点 y_0)处对 x(对 y)的F-导算子存在,则称它为 F 在 (x_0,y_0) 处对 x(对 y)的 F-偏导数或偏导算子,记为 $F'_x(x_0,y_0)(F'_y(x_0,y_0))$. 若 F 在 D 内的每一点对 x(对 y)的 F-偏导算子都存在,则确定了一个 F 对 x(对 y)的 F-偏导映射或偏导数 $F'_x(F'_y)$.

定理 2.4.1(隐函数定理) 设 D 为 $X\times Y$ 中的开集, $(x_0,y_0)\in D$. 若 $F:D\to Z$ 连续, $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x,y)$ 在 D 内存在且在点 (x_0,y_0) 处连续,并且 $F'_y(x_0,y_0):Y\to Z$ 有有界逆,则存在 $r>0$ 和 $\delta>0$,使得 $\|x-x_0\|<r$ 时,算子方程 $F(x,y)=0$ 在 $\|y-y_0\|<\delta$ 内存在唯一的解 $y=f(x)$,满足 $y_0=f(x_0)$,且 $f(x)$ 在 $\|x-x_0\|<r$ 内连续.

证明 因为 $F'_y(x_0,y_0):Y\to Z$ 具有有界逆 $[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}$,故存在 $M>0$ 使

$$\|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\|\leqslant M.$$

又因 $F'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续,且 F 在 D 内连续,故存在 $\bar r$ 和 $\delta>0$,使得当 $\|x-x_0\|<\bar r$, $\|y-y_0\|<\delta$ 时,有

$$\|F'_y(x,y)-F'_y(x_0,y_0)\|<\frac{1}{2M}, \tag{2.4.1}$$

且 $\exists r\in(0,\bar r]$,使得当 $\|x-x_0\|<r$ 时,有

$$\|F(x,y_0)\|=\|F(x,y_0)-F(x_0,y_0)\|<\frac{\delta}{2M}. \tag{2.4.2}$$

现将满足 $\|x-x_0\|<r$ 的 x 固定并定义算子 $T(x,\cdot)$:

$$T(x,y)=y-[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y),$$

则"$T(x,y)$ 在 $\|y-y_0\|<\delta$ 内存在唯一不动点 $f(x)$"等价于"算子方程 $F(x,y)=0$ 存在唯一解 $y=f(x)$".

当 $\|y-y_0\|<\delta$,由式(2.4.1)有

$$\begin{aligned}\|T'_y(x,y)\|&=\|I_d-[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F'_y(x,y)\|\\&\leqslant\|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\|\cdot\|F'_y(x_0,y_0)-F'_y(x,y)\|\\&<M\cdot\frac{1}{2M}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

由定理 2.3.4 和定理 2.3.5 知,当 $\|y_1-y_0\|\leqslant\delta$, $\|y_2-y_0\|\leqslant\delta$ 时,有 $\theta\in(0,1)$ 使

$$\begin{aligned}\|T(x,y_1)-T(x,y_2)\|&\leqslant\|T'_y(x,y_1+\theta(y_2-y_1))\|\,\|y_2-y_1\|\\&<\frac{1}{2}\|y_2-y_1\|,\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

故 $T(x,\cdot)$在 $\|y-y_0\|\leqslant\delta$ 上是一个压缩映射. 又当 $\|y-y_0\|\leqslant\delta$ 时,由式(2.4.2)和(2.4.3)有

$$\begin{aligned}\|T(x,y)-y_0\|&\leqslant\|T(x,y)-T(x,y_0)\|+\|T(x,y_0)-y_0\|\\&=\|T(x,y)-T(x,y_0)\|+\|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y_0)\|\\&<\frac{1}{2}\|y-y_0\|+M\cdot\frac{\delta}{2M}\\&\leqslant\delta,\end{aligned}$$

即 $T(x,\cdot)$将闭球 $\widetilde{B}(y_0;\delta)$映入开球 $B(y_0;\delta)$. 据压缩映射原理知,当 $\|x-x_0\|<r$ 时,算子 $T(x,\cdot)$在 $\|y-y_0\|<\delta$ 内存在唯一不动点 $f(x)$,且此不动点满足 $\|f(x)-y_0\|<\delta$ 及 $f(x_0)=y_0$.

最后只需再证 $f(x)$在 $\|x-x_0\|<r$ 连续. 任取 x_1,x_2 满足 $\|x_i-x_0\|<r$,并记 $y_i=f(x_i),i=1,2$,则由式(2.4.3)有

$$\begin{aligned}\|y_2-y_1\|&=\|T(x_2,y_2)-T(x_1,y_1)\|\\&\leqslant\|T(x_2,y_2)-T(x_2,y_1)\|+\|T(x_2,y_1)-T(x_1,y_1)\|\\&<\frac{1}{2}\|y_2-y_1\|+\|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)]\|\\&\leqslant\frac{1}{2}\|y_2-y_1\|+M\|F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\|,\end{aligned}$$

故得

$$\|y_2-y_1\|<2M\|F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\|. \tag{2.4.4}$$

因 x_1,x_2 属于 $\|x-x_0\|<r$,而 y_1,y_2 属于 $\|y-y_0\|<\delta$,且 $F(x,y)$在 $\|x-x_0\|<r$, $\|y-y_0\|<\delta$ 连续,故当 $x_2\to x_1$ 时,上式右端趋于 0,从而

$$f(x_2)=y_2\to y_1=f(x_1).$$

这就证得 $y=f(x)$在 $\|x-x_0\|<r$ 内是连续的. 证毕.

如果对算子 F 增加一定的光滑性,则利用隐函数定理得到的解 $y=f(x)$也会具有相应的光滑性.

定理 2.4.2 除满足定理 2.4.1 的全部条件外,若 $F'_x(x,y)$与 $F'_y(x,y)$还在(x_0,y_0)的某邻域中连续,则存在 $r>0$ 和 $\delta>0$,使定理 2.4.1 结论中的唯一解 $y=f(x)$在 $\|x-x_0\|<r$ 中具有连续的 F-导数 $f'(x)$,且

$$f'(x)=-[F'_y(x,f(x))]^{-1}F'_x(x,f(x)),\ \|x-x_0\|<r.$$

证明 假设在定理 2.4.1 中选定的 r,δ 还满足:对 $M_1>0$,当 $\|x-x_0\|<r$, $\|y-y_0\|<\delta$ 时,有 $\|F'_x(x,y)\|<M_1$. 任取 $x_2\in X$,使得 $\|x_2-x_0\|<r$,则

$$\begin{aligned}F'_y(x_2,y)&=F'_y(x_0,y_0)+[F'_y(x_2,y)-F'_y(x_0,y_0)]\\&=F'_y(x_0,y_0)\{I_d+[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}[F'_y(x_2,y)-F'_y(x_0,y_0)]\}.\end{aligned}$$

利用式(2.4.1)可得 $F'_y(x_2,y)$在 $\|x_2-x_0\|<r$, $\|y-y_0\|<\delta$ 内具有一致有界的逆算子. 因此,存在常数 $M_2>0$,使得 $\|x_2-x_0\|<r$, $\|y-y_0\|<\delta$ 时有

$$\|[F'_y(x_2,y)]^{-1}\|\leqslant M_2.$$

于是当 $x_1\in X$, $\|x_1-x_0\|<r$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\|f(x_1)-f(x_2)-\{-[F_y'(x_2,f(x_2))]^{-1}F_x'(x_2,f(x_2))\}(x_1-x_2)\|\\
\leqslant&\|[F_y'(x_2,f(x_2))]^{-1}\|\ \|F_y'(x_2,f(x_2))(f(x_1)-f(x_2))+F_x'(x_2,f(x_2))(x_1-x_2)\|\\
\leqslant&M_2\|F_y'(x_2,f(x_2))(f(x_1)-f(x_2))+F_x'(x_2,f(x_2))(x_1-x_2)\|,
\end{aligned}$$

由于

$$F(x_1,f(x_1))=F(x_2,f(x_2))=0,$$

故上面不等式最右端是 $\|f(x_1)-f(x_2)\|+\|x_1-x_2\|$ 的高阶无穷小量. 利用式(2.4.4)可得

$$\|f(x_1)-f(x_2)\|\leqslant 2M\sup_{\substack{\|x-x_0\|<r\\ \|y-y_0\|<\delta}}\|F_x'(x,y)\|\cdot\|x_1-x_2\|\leqslant 2MM_1\|x_1-x_2\|.$$

于是前述不等式最右端是 $\|x_1-x_2\|$ 的高阶无穷小量. 故 $f(x)$在 x_2 处 F－可微, 且

$$f'(x_2)=-[F_y'(x_2,f(x_2)]^{-1}F_x'(x_2,f(x_2)),\ \|x_1-x_2\|<r.$$

证毕.

2.4.2 反函数定理

在隐函数定理中, 如果我们取 $Z=Y, F(x,y)=f(x)-y$, 则得下面的反函数定理.

定理 2.4.3 设 $x_0\in D\subset X$. 若算子 $f:D\to Y$ 是连续 F－可微的, $f(x_0)=y_0$, 且 $f'(x_0)$ 有有界逆, 则存在 x_0 的邻域 V 与 y_0 的邻域 W, 使得映射 $f|_V:V\to W$ 是微分同胚(即存在连续 F－可微的逆算子 $(f|_V)^{-1}:W\to V$), 且

$$(f^{-1})'(y_0)=[f'(x_0)]^{-1}(\text{其中 } f \text{ 表示 } f|_V).$$

证明 记 $F(x,y)=f(x)-y$. 因算子 $f:D\to Y$ 是连续 F－可微的, 故由推论 2.3.3 知 $F:D\to Y$ 连续. 从而 $F(x,y):D\times Y\to Y$ 连续, 且 $F_x'(x,y)=f'(x)$ 在点(x_0,y_0)处连续, 并且 $F_x'(x_0,y_0)=f'(x_0)$有有界逆. 故由定理 2.4.1 知存在 $r,\delta>0$ 使得 $\|y-y_0\|<r$ 时, 方程$F(x,y)=0$ 在 $\|x-x_0\|<\delta$ 内存在唯一解 $x=\tilde{f}(y)$, 且 $x=\tilde{f}(y)$在 $\|y-y_0\|<r$ 内连续.

令 $W=B(y_0;r)$, 且 $V=\tilde{f}(W)$. 由 $f:D\to Y$ 连续, 故 $f^{-1}(W)$是 D 中的开集, 从而 $B(x_0;\delta)\cap f^{-1}(W)=V$是$X$ 中的开集, 即 V 是x_0 的一个邻域. 由于 $f|_V:V\to W$ 是一一对应, 据定理2.4.2 又知 $\tilde{f}=(f|_V)^{-1}$在 W 上连续F－可微, 所以 $f|_V:V\to W$ 是微分同胚. 再由定理 2.4.2 的证明和定理 2.4.1 知

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(y_0)&=\tilde{f}'(y_0)\\
&=-[F_x'(x_0,y_0)]^{-1}F_y'(x_0,y_0)\\
&=-[f'(x_0)]^{-1}(-I_d)\\
&=[f'(x_0)]^{-1}.
\end{aligned}$$

证毕.

2.4.3 牛顿迭代法

现在我们再从计算方法的角度考虑方程 $F(x,y)=0$ 的近似解 $y=f(x)$.

根据隐函数定理的证明可知$\forall\ \|x-x_0\|<r, T(x,y)=y-[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y)$关

于 y 在 $\widetilde{B}(y_0;\delta)$ 上是压缩映射，又据 Banach 压缩映射原理，$T(x,\cdot)$ 在 $\widetilde{B}(y_0;\delta)$ 内有唯一的不动点 $y(x)$，从而 $y(x)$ 满足 $F(x,y(x))=0, \forall \|x-x_0\|<r$.

如果取迭代序列为

$$y_{n+1}=T(x,y_n)=y_n-[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y_n), \quad n=0,1,2,\cdots,$$

则

$$\|y_n-y(x)\|\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|y_1-y_0\|,$$

其中 α 是映射 $T(x,\cdot)$ 的压缩率.

若将上述迭代序列修改为

$$y_{n+1}=y_n-[F'_y(x,y_n)]^{-1}F(x,y_n), \quad n=0,1,2,\cdots, \tag{2.4.5}$$

则得到 Newton 迭代序列. 这是数学分析中 Newton 切线法在算子方程上的推广，它的最大优点是收敛速度快，而缺点是需要增加 F 的光滑性，并且对初始值的选取也有较高的要求.

定理 2.4.4 设 $\widetilde{B}(y_0;\delta)=\{y\in Y:\|y-y_0\|\leqslant\delta\}$，$\widetilde{B}(x_0;r)=\{x\in X:\|x-x_0\|\leqslant r\}$，又设 $F:\widetilde{B}(x_0;r)\times\widetilde{B}(y_0;\delta)\to Z$ 连续且满足：存在 $M\geqslant\sqrt{\frac{2}{\delta}}$，使得

(1) 当 $x\in\widetilde{B}(x_0;r)$，$y\in\widetilde{B}(y_0,\delta)$ 时，$F'_y(x,y):Y\to Z$ 有有界逆，并且

$$\|[F'_y(x,y)]^{-1}\|\leqslant M;$$

(2) 当 $x\in\widetilde{B}(x_0;r)$，$y_i\in\widetilde{B}(y_0,\delta)$，$i=1,2$ 时，

$$\|F'_y(x,y_1)-F'_y(x,y_2)\|\leqslant M\|y_1-y_2\|;$$

(3) $\|F(x,y_0)\|\leqslant\frac{1}{M^3}$.

则存在 $y(x)\in\widetilde{B}(y_0,\delta)$ 使得 $F(x,y(x))=0, x\in\widetilde{B}(x_0;r)$，并且 Newton 迭代序列(2.4.5)收敛到 $y(x)$，其收敛速度为

$$\|y_n-y(x)\|\leqslant\frac{4}{M^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

证明 以 $F'_y(x,y_n)$ 作用于式(2.4.5)的两端，得

$$F(x,y_n)+F'_y(x,y_n)(y_{n+1}-y_n)=0. \tag{2.4.6}$$

下面用数学归纳法证明：$y_n\in\widetilde{B}(y_0,\delta)$，并且

$$\|y_{n+1}-y_n\|\leqslant\frac{2}{M^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}. \tag{2.4.7}$$

根据假设，式(2.4.7)对 $n=0$ 显然成立. 假设式(2.4.7)对 $0\leqslant n<k$ 都成立，现证它对 $n=k$ 也成立. 由式(2.4.7)对 $0\leqslant n<k$ 都成立，得

$$\|y_k-y_0\|\leqslant\sum_{n=0}^{k-1}\|y_{n+1}-y_n\|\leqslant\sum_{n=0}^{k-1}\frac{2}{M^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\leqslant\frac{2}{M^2}\leqslant\delta,$$

因此 $y_k\in\widetilde{B}(y_0,\delta)$. 根据式(2.4.6)、微分中值公式和假设条件(2)，有

$$\begin{aligned}\|F(x,y_k)\| &= \|F(x,y_k)-F(x,y_{k-1})-F'_y(x,y_{k-1})(y_k-y_{k-1})\| \\ &= \left\|\int_0^1 F'_y(x,y_{k-1}+t(y_k-y_{k-1}))(y_k-y_{k-1})\mathrm{d}t-\int_0^1 F'_y(x,y_{k-1})(y_k-y_{k-1})\mathrm{d}t\right\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^1 \| F'_y(x, y_{k-1} + t(y_k - y_{k-1})) - F'_y(x, y_{k-1}) \| \| y_k - y_{k-1} \| \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{2} M \| y_k - y_{k-1} \|^2, \tag{2.4.8}$$

从而由式(2.4.5)、假设条件(1)和归纳假设可得

$$\begin{aligned} \| y_{k+1} - y_k \| &\leqslant \| [F'_y(x, y_k)]^{-1} \| \| F(x, y_k) \| \\ &\leqslant \frac{M^2}{2} \| y_k - y_{k-1} \|^2 \\ &\leqslant \frac{M^2}{2} \left(\frac{2}{M^2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{k-1}} \right)^2 \\ &= \frac{2}{M^2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^k}, \end{aligned}$$

因此式(2.4.7)对 $n = k$ 也成立. 归纳法证明结束.

由式(2.4.7)可得

$$\begin{aligned} \| y_{n+p} - y_n \| &\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \| y_{k+1} - y_k \| \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{2}{M^2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^k} \\ &\leqslant \frac{2}{M^2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \\ &= \frac{4}{M^2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n}, \end{aligned}$$

即 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 序列, 故在 $\widetilde{B}(y_0; \delta)$ 内有极限 $y(x)$. 令 $p \to \infty$ 有

$$\| y(x) - y_n \| \leqslant \frac{4}{M^2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n},$$

利用式(2.4.8)可得 $F(x, y_n) \to 0$, 再根据 F 的连续性知 $F(x, y(x)) = 0$. 证毕.

2.5　Banach 空间中常微分方程初值问题

本节介绍 Banach 空间中常微分方程初值问题解的存在性、唯一性以及解的存在区间等基本内容, 这些内容是变分原理、动力系统等理论的基础.

2.5.1　存在唯一性

设 X 是 Banach 空间, $f: [0, \infty) \times X \to X$ 连续, 对固定的 $t \in [0, \infty)$, $f(t, x)$ 关于 x 是局部 Lipschitz 连续的, 并且 Lipschitz 常数对 t 在任一有界区间 $[0, a]$ 上一致有界, 即对任意 $x_0 \in X$ 及 $a > 0$, 存在 $r > 0$ 及 $K = K(x_0, a, r) > 0$ 使得当 $x, y \in \widetilde{B}(x_0; r)$, $t \in [0, a]$ 时

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leqslant K \| x - y \|. \tag{2.5.1}$$

考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(0)=x_0\in X.\end{cases}\tag{2.5.2}$$

定理 2.5.1　设 $f(t,x)$满足上述假设，则存在 $\beta>0$,使得初值问题(2.5.2)在区间$[0,\beta]$上有唯一的解 $x(t)$,并且解 $x(t)$连续地依赖于初始值 x_0,即若 $x(t)$和 $y(t)$分别是(2.5.2)对应于初值 x_0 与 y_0 的解,则

$$\| x(t)-y(t)\| \leqslant \| x_0-y_0\| e^{Kt}.\tag{2.5.3}$$

证明　显然(2.5.2)等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s.\tag{2.5.4}$$

利用关于 f 的假设,对此给定的 $x_0\in X$ 以及 $\alpha>0$,存在 $r>0$, $K=K(x_0,\alpha,r)>0$,使得当 $x,y\in\widetilde{B}(x_0;r)$, $t\in[0,\alpha]$时有

$$\| f(t,x)-f(t,y)\| \leqslant K\| x-y\|,$$

则 f 在$[0,\alpha]\times\widetilde{B}(x_0;r)$上一致有界.记

$$M=\sup_{\substack{t\in[0,\alpha]\\ \| x-x_0\|\leqslant r}}\| f(t,x)\|,$$

取 $\beta>0$,使得 $\beta\leqslant\alpha$, $\beta K<1$,并且 $\beta M\leqslant r$,下面证明积分方程(2.5.4)在 $t\in[0,\beta]$上有唯一解.

现以记号 $\mathrm{C}(I,E)$表示从区间 I 到集 E 的连续映射的集.记 $D=\mathrm{C}([0,\beta],(\widetilde{B}(x_0;r))$,则 D 是 Banach 空间 $\mathrm{C}([0,\beta],X)$中以常值映射 x_0 为中心以 r 为半径的闭球,其中 $x\in\mathrm{C}([0,\beta],X)$的范数定义为 $\| x\| =\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\beta}\| x(t)\|$.再令 $T:\mathrm{C}([0,\beta],X)\to\mathrm{C}([0,\beta],X)$定义为

$$(Tx)(t)=x_0+\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s,$$

则积分方程(2.5.4)的解等价于映射 T 的不动点.为证 T 有唯一不动点,利用 Banach 压缩映射原理,只需要证明 T 映射D 到D 中,且 T 是压缩的.

任取 $x,y\in D$,则有

$$\|(Tx)(t)-x_0\| =\left\|\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant\int_0^t\| f(s,x(s))\|\mathrm{d}s\leqslant M\beta\leqslant r,$$

以及

$$\begin{aligned}\| Tx-Ty\| &=\max_{0\leqslant t\leqslant\beta}\left\|\int_0^t(f(s,x(s))-f(s,y(s)))\mathrm{d}s\right\|\\ &\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant\beta}\int_0^t\| f(s,x(s))-f(s,y(s))\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant K\beta\| x-y\|,\end{aligned}$$

故 T 映射D 到D 中,且是压缩的.

解的唯一性以及解对初值的连续依赖性都可以从不等式(2.5.3)容易得出,因此下面只证(2.5.3).

我们有

$$\| x(t)-y(t) \| \leqslant \| x_0-y_0 \| + \int_0^t \| f(s,x(s))-f(s,y(s)) \| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant \| x_0-y_0 \| + K\int_0^t \| x(s)-y(s) \| \mathrm{d}s.$$

令 $\omega(t)=\| x(t)-y(t) \|$，则 $\omega(t)$满足

$$\omega(t)\leqslant \| x_0-y_0 \| + K\int_0^t \omega(s)\mathrm{d}s,$$

故由下面的 Gronwall 引理立即得出

$$\| x(t)-y(t) \| \leqslant \| x_0-y_0 \| \mathrm{e}^{Kt}.$$

证毕.

引理 2.5.1(Gronwall 引理)　设 $u(t),v(t),\omega(t)$是定义在$[a,b]$上的三个实函数，其中 u 非负且在$[a,b]$上 L－可积，ω 在$[a,b]$上连续，而 v 在$[a,b]$上绝对连续(*)，若它们满足

$$\omega(t)\leqslant v(t)+\int_a^t u(s)\omega(s)\mathrm{d}s,\ a\leqslant t\leqslant b, \tag{2.5.5}$$

则当 $t\in[a,b]$时，

$$\omega(t)\leqslant v(a)\mathrm{e}^{\int_a^t u(s)\mathrm{d}s}+\int_a^t \mathrm{e}^{\int_s^t u(\tau)\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s. \tag{2.5.6}$$

证明　令 $H(t)=\int_a^t u(s)\omega(s)\mathrm{d}s$，则式(2.5.5)变为

$$\omega(t)\leqslant H(t)+v(t),\ t\in[a,b], \tag{2.5.7}$$

以 $u(t)\cdot\mathrm{e}^{-\int_a^t u(s)\mathrm{d}s}$乘上式两端，并注意到在$[a,b]$上几乎处处有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=u(t)\omega(t),$$

于是知在$[a,b]$上几乎处处有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\int_a^t u(s)\mathrm{d}s}\cdot H(t)]\leqslant u(t)\mathrm{e}^{-\int_a^t u(s)\mathrm{d}s}\cdot v(t).$$

因 $H(a)=0$，故从 a 到 t 积分可得

$$\mathrm{e}^{-\int_a^t u(s)\mathrm{d}s}H(t)\leqslant\int_a^t u(s)\cdot\mathrm{e}^{-\int_a^s u(s)\mathrm{d}s}\cdot v(s)\mathrm{d}s,$$

$$=-\mathrm{e}^{-\int_a^t u(s)\mathrm{d}s}\cdot v(t)+v(a)+\int_a^t \mathrm{e}^{-\int_a^s u(\tau)\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,$$

因此

$$H(t)+v(t)\leqslant v(a)\mathrm{e}^{\int_a^t u(s)\mathrm{d}s}+\int_a^t \mathrm{e}^{\int_s^t u(\tau)\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,\quad t\in[a,b].$$

结合(2.5.7)可推得(2.5.6)成立. 证毕.

(*)**注**　函数 $v(t)$在$[a,b]$上绝对连续，是指 v 是$[a,b]$上的有限实值函数并满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使对$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间(a_i,b_i)，$i=1,2,\cdots,n$，当 $\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^n |v(b_i)-v(a_i)|<\varepsilon.$$

根据实变函数理论(见[53]),这时 $v(t)$必然在$[a,b]$上一致连续,并在$[a,b]$上几乎处处存在有限导数,且$\frac{dv}{ds}$在$[a,b]$上 L-可积.引理中关于 v 的假设可改为v 在$[a,b]$上 Lipschitz 连续,这是因为容易证明$[a,b]$上的 Lipschitz 连续函数是绝对连续的.

2.5.2　解的极大存在区间

若抽象函数 $x(t)$在含原点的区间 I 上定义且满足(2.5.2),则称 $x(t)$是(2.5.2)的一个解,区间 I 称为这个解的存在区间.把初值问题(2.5.2)的一切解的存在区间的并集称为初值问题(2.5.2)的解的极大存在区间,不难证明,它是一个右开的区间.

注　为了在下一章讨论最速下降法,值得指出的是上面的结果以及下面的定理都可以推广到 f 是$(-\infty,+\infty)\times X$ 到X 中的连续映射的情形去,相应地,式(2.5.3)要适当修改且初值问题(2.5.2)的解的存在区间和极大存在区间将分别是某个以 0 为中心的小区间$[-\beta,\beta]$和$(-\infty,+\infty)$(参见[23]第 443 页).

定理 2.5.2　设 $f:[0,\infty)\times X\to X$ 满足本节一开始的假定.若存在 $a,b>0$,使得

$$\|f(t,x)\|\leqslant a+b\|x\|,\ \forall (t,x)\in[0,\infty)\times X, \tag{2.5.8}$$

则初值问题(2.5.2)的解的极大存在区间为$[0,+\infty)$.

证明　由定理 2.5.1 可得,初值问题(2.5.2)在$[0,\beta]$上有唯一的解 $x(t)$,设 $x(t)$的极大存在区间为$[0,T)$,我们来证明 $T=+\infty$.若设 $T<\infty$,则由

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s,$$

以及(2.5.8)可得$\forall \tilde{T}\in(0,T)$,有

$$\|x(t)\|\leqslant\|x_0\|+aT+b\int_0^t\|x(s)\|\mathrm{d}s,\ \forall t\in[0,\tilde{T}],$$

应用 Gronwall 引理(引理 2.5.1),注意到 $\tilde{T}\in(0,T)$的任意性,即得

$$\|x(t)\|\leqslant(\|x_0\|+aT)e^{bT},\ \forall t\in[0,T),$$

这表明 $x(t)$在 X 中关于$t\in[0,T)$一致有界.进一步,对任何 $t,t_1\in[0,T)$,有

$$\begin{aligned}\|x(t)-x(t_1)\|&=\left\|\int_{t_1}^t f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\|\\&\leqslant a|t-t_1|+b\left|\int_{t_1}^t\|x(s)\|ds\right|\\&\leqslant(a+bM)|t-t_1|,\end{aligned}$$

其中 $M=(\|x_0\|+aT)e^{bT}$.因此,$\lim\limits_{t\to T^-}x(t)$存在,设为 $\bar{x}$,再利用定理 2.5.1,便得初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x(t)),\\ x(T)=\bar{x},\end{cases}$$

对某个 $\delta>0$ 在$[T-\delta,T+\delta]$上有唯一解 $x(t)$.将 $x(t)$延拓到$[0,T+\delta]$上,使它在$[T,T+\delta]$上等于 $y(t)$,则 $x(t)$成为初值问题(2.5.2)在$[0,T+\delta]$上的解,这与$[0,T)$是 $x(t)$的极大存在区间矛盾,故 $T=+\infty$.证毕.

定理 2.5.2 可以推广为下面更一般的形式.

定理 2.5.3 设 $f:[0,+\infty)\times X\to Y$ 满足本节一开始的假设,并且当 $(x,t)\in[0,+\infty)\times X$ 时

$$\|f(t,x)\|\leqslant\lambda(t)(1+h(\|x\|)),$$

其中 $\lambda(t)$ 和 $h(r)$ 都是 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数,且 $h(r)$ 满足

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{1+h(r)}=+\infty,$$

则初值问题(2.5.2)的解的极大存在区间是 $[0,+\infty)$.

第 3 章　变分法

科学上的一个基本原理是:许多现象的平衡状态常表现为"能量"在一定条件下的极值特性,描述这一原理的数学工具就是变分法.

物理学中的变分法,萌芽于 17 世纪,到 19 世纪中期已具有相当完善的数学表达,近二三十年来又有重大发展.现代的变分理论,不仅在物理、化学、生物及工程技术等领域有广泛应用,而且与经济管理和优化与控制等学科有关,因为这些领域或学科中的许多问题可归结为求目标函数在一定条件下的极值问题.现代变分法的一个基本思想是:把求非线性算子方程的解转化为求某个泛函的临界点(特别是极值点).

下面先介绍一个把偏微分方程边值问题转化为泛函极值问题的例子，然后再讨论泛函极值的存在唯一性问题和具体求极值的最速下降法等.

例 3.0.1　考虑二阶椭圆型方程边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(x,y)\in\Omega,\\ \left.\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]\right|_{\Gamma}=\varphi,\end{cases}\tag{3.0.1}$$

其中 Ω 是 xOy 平面上由光滑曲线 Γ 所围成的有界区域,$\boldsymbol{n}$ 表示区域边界的外法向,σ 和 φ 都是已知函数,且 $\sigma>0$,与之相应的变分问题如下:

在 $E=C^2(\bar{\Omega})$ 中求一函数 $\tilde{u}$,使泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\sigma u^2-\varphi u\right)\mathrm{d}s$$

达到极小值，即求 $\tilde{u}\in E$,使

$$J(\tilde{u})=\min_{u\in E}J(u).\tag{3.0.2}$$

事实上不难证明:在 $\bar{\Omega}$ 上二阶连续可微的函数 $\tilde{u}=\tilde{u}(x,y)$是边值问题 (3.0.1)的解,当且仅当它是变分问题(3.0.2)的解.

3.1　泛函极值与极小化序列

3.1.1　极值理论

变分理论中最基本的问题是极值问题,本节将建立有关泛函极值的几个基本定理.

定义 3.1.1　设 E 是实 Banach 空间,$\Omega\subset E$ 是开集,$f:\Omega\to\mathbf{R}$ 是 Ω 上的一个泛函.如果在 Ω 的每一点 x 处,f 都具有有界线性的 Gâteaux 微分,记 $F(x)=\mathrm{D}f(x)$,$\forall x\in\Omega$,则称算子 $F:\Omega\to E^*$ 为泛函 f 的梯度,记为 $F(x)=\mathrm{grad}\,f(x)$,或 $F=\mathrm{grad}\,f(x)$,此时又称泛函 f 为算子 F 的位势.于是,梯度算子 F 满足

$$F(x)h=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t},\ \forall h\in E.$$

例 3.1.1 考虑实 Hilbert 空间 H 上的泛函 $f(x)=\|x\|$，求 grad $f(x)$.

解 易知

$$f(x+th)-f(x)=\|x+th\|-\|x\|=\frac{2t(h,x)+t^2\|h\|^2}{\|x+th\|+\|x\|},$$

由此可得

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=\left(h,\frac{x}{\|x\|}\right),\ \forall x\neq\theta,$$

故有

$$\text{grad}\|x\|=\frac{x}{\|x\|},\ \forall x\neq\theta, x\in H.$$

定义 3.1.2 设 E 是实 Banach 空间，$x_0\in D\subset E$，$f:D\to\mathbf{R}$ 是 D 上的一个泛函.

(1)如果 $\forall\{x_n\}\subset D$，$x_n\xrightarrow{w}x_0$，蕴含

$$f(x_n)\to f(x_0),$$

则称 f 在 x_0 处弱连续；

(2)如果 $\forall\{x_n\}\subset D$，$x_n\xrightarrow{w}x_0$，蕴含

$$f(x_0)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(x_n),\tag{3.1.1}$$

则称 f 在 x_0 处弱下半连续；

(3)如果 $\forall\{x_n\}\subset D$，$x_n\xrightarrow{w}x_0$，蕴含

$$f(x_0)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}f(x_n),\tag{3.1.2}$$

则称 f 在 x_0 处弱上半连续；

(4)若 f 在 D 的每一点都弱连续(弱下半连续、弱上半连续)，则称 f 在 D 上弱连续(弱下半连续、弱上半连续).

显然，f 在 x_0 处弱连续，当且仅当 f 在 x_0 处既弱下半连续又弱上半连续.

定理 3.1.1 设 D 是实 Banach 空间 E 中的凸集，泛函 $f:D\to\mathbf{R}$ 在 D 上具有有界线性的 G-微分，且 grad $f(x)=F(x)$，$\forall x\in D$. 如果 $F:D\to E^*$ 是紧算子，则 f 必在 D 上是弱连续的.

证明 若 f 在 $x_0\in D$ 处不是弱连续的，则存在 $\{x_n\}\subset D$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得 $x_n\xrightarrow{w}x_0$，但有

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

据中值公式，有 $\{\tau_n\}\subset(0,1)$，使得

$$\varepsilon_0\leqslant|f(x_n)-f(x_0)|=|F(x_0+\tau_n(x_n-x_0))(x_n-x_0)|.$$

由 $\{x_n\}$ 有界及 F 的紧性，不妨设 $F(x_0+\tau_n(x_n-x_0))\to\varphi_0\in E^*$，于是有

$$\begin{aligned}\varepsilon_0&\leqslant|F(x_0+\tau_n(x_n-x_0))(x_n-x_0)|\\&\leqslant\|F(x_0+\tau_n(x_n-x_0))-\varphi_0\|\cdot\|x_n-x_0\|+|\varphi_0(x_n-x_0)|\to 0,\end{aligned}$$

此矛盾完成了定理的证明. 证毕.

定义 3.1.3 (1)设 $D\subset E$ 为凸集，泛函 $f:D\to\mathbf{R}$ 称为在 D 上是凸的，是指 $\forall x,y\in D$，$t\in[0,1]$，均有

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y),\tag{3.1.3}$$

若只在 $x=y$ 时取等号,则称 f 是严格凸的.

(2)称算子 $F:D\to E^*$ 是单调的,是指 $\forall x,y\in D$,恒有

$$(F(x)-F(y),x-y)\geqslant 0, \tag{3.1.4}$$

此处对 $x^*\in E^*$,$(x^*,x)\equiv x^*(x)$.

定理 3.1.2 设 f 是实 Banach 空间 E 上的泛函,在 E 上具有有界线性的 G－微分且 $\operatorname{grad} f(x)=F(x)$, $\forall x\in E$, 则

(1)$F:E\to E^*$ 是单调算子的充分必要条件是 f 为凸泛函;

(2)若 $F:E\to E^*$ 是单调算子,则 f 在 E 上必是弱下半连续的.

证明 (1)必要性: $\forall x,y\in E$,$0\leqslant t\leqslant 1$,我们有

$$\begin{aligned}&tf(x)+(1-t)f(y)-f(tx+(1-t)y)\\=&-t[f(x+(1-t)(y-x))-f(x)]-(1-t)[f(y+t(x-y))-f(y)],\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

利用中值公式知

$$f(x+(1-t)(y-x))-f(x)=(1-t)(F(x+\tau(1-t)(y-x)),y-x), \tag{3.1.6}$$

$$f(y+t(x-y))-f(y)=t(F(y+\sigma t(x-y)),x-y), \tag{3.1.7}$$

其中 $0<\tau<1$,$0<\sigma<1$.记

$$x_1=x+\tau(1-t)(y-x),\quad y_1=y+\sigma t(x-y), \tag{3.1.8}$$

则

$$y_1-x_1=t_1(y-x),\text{其中 } t_1=1-\sigma t-\tau(1-t)>0.$$

将式(3.1.6)~(3.1.8)代入式(3.1.5),且利用 F 的单调性得

$$\begin{aligned}&tf(x)+(1-t)f(y)-f(tx+(1-t)y)\\=&t(1-t)(F(y_1)-F(x_1),y-x)\\=&\frac{t(1-t)}{t_1}(F(y_1)-F(x_1),y_1-x_1)\\\geqslant&0,\end{aligned}$$

故 f 是凸泛函.

充分性:设 f 是凸泛函.于是

$$\frac{1}{t}[f(y+t(x-y))-f(y)]\leqslant f(x)-f(y),\quad 0<t\leqslant 1.$$

令 $t\to 0^+$ 取极限得

$$(F(y),x-y)\leqslant f(x)-f(y), \tag{3.1.9}$$

对调 x,y 的位置,同样有

$$(F(x),y-x)\leqslant f(y)-f(x), \tag{3.1.10}$$

式(3.1.9)与式(3.1.10)相加即得

$$(F(y)-F(x),y-x)\geqslant 0,$$

故 F 是 E 上的单调算子.

(2)设 $x_n\xrightarrow{\text{w}}x_0$,利用 F 的单调性及中值公式知,存在 $0<\tau_n<1(n=1,2,\cdots)$,使得

$$\begin{aligned}f(x_n)&=f(x_n)-f(x_0)+f(x_0)\\&=(F(x_0+\tau_n(x_n-x_0)),x_n-x_0)+f(x_0)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\tau_n}(F(x_0+\tau_n(x_n-x_0))-F(x_0),\tau_n(x_n-x_0))+(F(x_0),x_n-x_0)+f(x_0)$$

$$\geqslant(F(x_0),x_n-x_0)+f(x_0),$$

两边取下极限得

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)\geqslant f(x_0),$$

故 f 的弱下半连续性得证. 证毕.

定义 3.1.4 设 $D\subset E$ 是一开集, M 是 E 中集合, 泛函 $f:D\to\mathbf{R}$, $x_0\in D[x_0\in D\cap M]$, 若存在 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)=\{x\mid \|x-x_0\|<\delta\}$, 使当 $x\in U(x_0,\delta)[x_0\in U(x_0,\delta)\cap M]$ 时, 恒有

$$f(x)\geqslant f(x_0)\quad(\text{或 } f(x)\leqslant f(x_0)),\tag{3.1.11}$$

则称泛函 f 在 x_0 处取到极小值(或极大值)[泛函 $f(x)$ 在 x_0 处取到(关于条件 $x\in M$ 的)条件极小值(或条件极大值)], 极小值和极大值统称为极值.

在条件极值问题中, 如果集合 M 由 $M=\{x\in E: g(x)=0\}$ 给出, 其中 g 是从 E 到一实线性赋范空间的算子, 则称其为带等号约束的条件极值问题; 如果集合 M 由 $M=\{x\in E: g(x)\geqslant 0\}$ 给出, 其中 g 是从 E 到一有序 Banach 空间(例如 $\mathbf{R}$)的算子, 则称其为带不等号约束的条件极值问题. 为简单计, 下面只讨论无条件的极值问题.

定义 3.1.5 设 $D\subset E$ 是一开集, 泛函 $f:D\to\mathbf{R}$ 在 D 上具有有界线性的 G－微分. 若 $x_0\in D$, 使得

$$\operatorname{grad} f(x_0)=\theta,\tag{3.1.12}$$

则称 x_0 为泛函 f 的一个临界点或驻点, $c=f(x_0)$ 称为 f 的一个临界值.

定理 3.1.3 设 $D\subset E$ 是一开集, 若泛函 $f:D\to\mathbf{R}$ 在 $x_0\in D$ 处取得极值, 并且 f 在 x_0 处具有有界线性的 G－微分, 则必有

$$\mathrm{D}f(x_0)=\theta.\tag{3.1.13}$$

证明 $\forall h\in E$, 考虑实函数 $\varphi(t)\equiv f(x_0+th)$, 由假设知 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处取得极值. 又

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=\mathrm{D}f(x_0)h,$$

由 $\varphi'(0)=0$ 得 $\mathrm{D}f(x_0)h=0$, 再由 $h\in E$ 的任意性即知式(3.1.13)成立. 证毕.

定理 3.1.4 设 D 是实 Banach 空间 E 中一个弱列紧的弱闭集, 泛函 $f:D\to\mathbf{R}$ 是弱下(上)半连续的, 则 f 在 D 上必有下(上)界, 且存在 $x_0\in D$, 使得

$$f(x_0)=\inf_{x\in D} f(x)\left(f(x_0)=\sup_{x\in D} f(x)\right).\tag{3.1.14}$$

证明 仅证 f 是弱下半连续的情形. 令 $c=\inf\limits_{x\in D} f(x)\,(c\geqslant-\infty)$, 于是存在 $\{x_n\}\subset D$, 使得 $f(x_n)\to c$. 因 D 弱列紧, 故存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k}\xrightarrow{\mathrm{w}}x_0\in E$. 由 D 弱闭知 $x_0\in D$, 据 f 的弱下半连续性得

$$c\leqslant f(x_0)\leqslant\varliminf_{k\to\infty} f(x_{n_k})=c,$$

由此可知 c 是有限数, 且 $f(x_0)=c$. 证毕.

定理 3.1.5 设 E 是自反 Banach 空间, 泛函 $f:D\to\mathbf{R}$ 是弱下(上)半连续的, 并且满足

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=+\infty\left(\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=-\infty\right),\tag{3.1.15}$$

则必存在 $x_0\in E$，使得

$$f(x_0)=\inf_{x\in E}f(x)\,(f(x_0)=\sup_{x\in E}f(x))\tag{3.1.16}$$

于是，若 f 还具有有界线性的 G－微分，则必有

$$\text{grad } f(x_0)=\mathrm{D}f(x_0)=\theta.\tag{3.1.17}$$

证明　仅证 f 是弱下半连续的情形．由条件(3.1.15)知，存在 $r>0$，使当 $\|x\|>r$ 时，恒有 $f(x)>f(\theta)$．因 E 是自反的，故闭球 $\tilde{B}(\theta;r)=\{x\in E:\|x\|\leqslant r\}$ 是弱列紧弱闭集，由定理 3.1.4 知，存在 $x_0\in\tilde{B}(\theta;r)$，使得

$$f(x_0)=\inf_{x\in\tilde{B}(\theta;r)}f(x)\leqslant f(\theta),$$

于是又有

$$f(x_0)=\inf_{x\in E}f(x).$$

证毕．

定义 3.1.6　设 E 是实 Banach 空间，泛函 $f:D\subset E\to\mathbf{R}$ 在无界集 D 上称为强制的，是指存在函数 $c:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$，$c(t)\to+\infty(t\to+\infty)$，使得

$$f(x)\geqslant c(\|x\|),\ \forall x\in D.\tag{3.1.18}$$

注　显然，强制泛函满足(3.1.15)中的第一式．

3.1.2　极小化序列

变分学和最优化的中心问题是求定义在 Banach 空间某一子集 D 上的泛函的最小值点．下面讨论最小值点的逼近——极小化序列．

定义 3.1.7　设 E 是实 Banach 空间，$D\subset E$，f 是定义在 D 上的实泛函．若存在 $\{x_n\}\subset D$，使得

$$f(x_n)\to\inf_{x\in D}f(x),\tag{3.1.19}$$

则称 $\{x_n\}$ 为泛函 f 的极小化序列．

命题 3.1.1　设 $D\subset E$ 是一凸集，$f:D\to\mathbf{R}$ 是严格凸泛函，则至多存在一点 $x_0\in D$，使

$$f(x_0)=\inf_{x\in D}f(x).$$

证明　若在 D 中存在 $u\neq v$，使得

$$f(u)=f(v)=\inf_{x\in D}f(x),$$

则 $\forall t\in(0,1)$，有

$$f(tu+(1-t)v)<tf(u)+(1-t)f(v)=\inf_{x\in D}f(x),$$

此与 u,v 是最小值点矛盾．证毕．

定理 3.1.6　设 E 是实自反 Banach 空间，实泛函 $f:E\to\mathbf{R}$ 是 G－可微、强制和严格凸的，则 f 的任一极小化序列弱收敛于 f 的唯一最小值点，此时最小值点当然也是临界点．

证明　首先由假设知，f 在整个空间 E 中有唯一的最小值点 x^*，且为 f 的临界点．

再证每一个极小化序列 $\{x_n\}$ 都是有界的．若不然，设 $\{x_n\}$ 无界，于是存在子列 $\{x_{n_k}\}$，$\|x_{n_k}\|>k$．由 f 的强制性，存在 $r>f(x^*)=\inf_{x\in E}f(x)$ 及 $k^*\in N$，使得当 $k>k^*$ 时，恒有 $f(x_{n_k})>r$，因此有

$$\inf_{x\in E} f(x)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})\geqslant r>\inf_{x\in E} f(x),$$

此矛盾证明了$\{x_n\}$的有界性.

然后,由$\{x_n\}$有界,结合 E 自反知,存在 $x_0\in E$ 及$\{x_{n_k}\}$,使得 $x_{n_k}\xrightarrow{w}x_0$.再考虑到 x^* 是 f 的最小值点及 f 的弱下半连续性得

$$f(x_0)\geqslant f(x^*)=\inf_{k\in N} f(x_{n_k})\geqslant f(x_0),$$

所以 $f(x_0)=f(x^*)$.由严格凸泛函最小值点的唯一性得 $x_0=x^*$,于是

$$x_{n_k}\xrightarrow{w}x^*(k\to\infty).$$

最后证 $x_n\xrightarrow{w}x^*$.若不然,不妨设有子列 $x_{m_j}\to v\neq x^*(j\to\infty)$,则有

$$f(v)\leqslant\underline{\lim}_{j\to\infty} f(x_{m_j})=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x^*),$$

此与 x^* 是 f 的唯一最小值点矛盾. 证毕.

3.1.3 Ekeland 变分原理

前面我们曾在对泛函添加强制性、弱下半连续或下半连续的条件下得到极小值的存在性,其实质是保证极小化序列含在一紧(或弱紧)集内.下面要介绍的 Ekeland 变分原理则在没有假定紧性条件的情形下来讨论近似极小值点的问题.

定理 3.1.7(Ekeland 定理) 设(X,ρ)是一个完备的度量空间, $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$,且 $f(x)\not\equiv+\infty$,又设 f 是下方有界的、下半连续函数,又设有 $\varepsilon>0$ 以及 $x_\varepsilon\in X$,使

$$f(x_\varepsilon)<\inf_{x\in X} f(x)+\varepsilon,$$

则存在点 $y_\varepsilon\in X$,使

$$f(y_\varepsilon)\leqslant f(x_\varepsilon), \tag{3.1.20}$$

$$\rho(y_\varepsilon,x_\varepsilon)\leqslant 1, \tag{3.1.21}$$

$$f(x)>f(y_\varepsilon)-\varepsilon\rho(y_\varepsilon,x),\ \forall x\neq y_\varepsilon. \tag{3.1.22}$$

证明 逐次定义 $u_n(n=0,1,2,\cdots)$如下:$u_0=x_\varepsilon$,若 u_n 已知,则或者

(1)$f(\omega)>f(u_0)-\varepsilon\rho(u_n,\omega),\ \forall\omega\in X-\{u_n\}$,

如此则取 $u_{n+1}=u_n$;或者

(2)$\exists\omega\in X-\{u_n\}$,使 $f(\omega)\leqslant f(u_n)-\varepsilon\rho(u_n,\omega)$,

如此则令

$$S_n=\{\omega\in X:f(\omega)\leqslant f(u_n)-\varepsilon\rho(u_n,\omega)\},$$

取 $u_{n+1}\in S_n$,使得

$$f(u_{n+1})-\inf_{x\in S_n} f(x)\leqslant\frac{1}{2}\left[f(u_n)-\inf_{x\in S_n} f(x)\right]. \tag{3.1.23}$$

我们来证,$\{u_n\}$是一个 Cauchy 列.

事实上,若情况(1)一直发生,那么点列$\{u_n\}$显然是 Cauchy 的,所以不妨设(1)不发生,使得

$$\varepsilon\rho(u_n,u_{n+1})\leqslant f(u_n)-f(u_{n+1}),\ n=1,2,\cdots, \tag{3.1.24}$$

从而

$$\varepsilon\rho(u_n,u_m)\leqslant f(u_n)-f(u_m),\ \forall\, n\leqslant m. \tag{3.1.25}$$

又因为 $f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$ 以及 $f(u_n)\geqslant\inf\limits_{x\in X}f(x)$，所以 $\{u_n\}$ 是 Cauchy 列.

设 $u_n\to u^*$，由 f 的下半连续性，得

$$f(u^*)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(u_n).$$

现在来证：可以取 $y_\varepsilon=u^*$. 事实上，式(3.1.20)是显然的，

$$f(u^*)\leqslant f(u_0)=f(x_\varepsilon).$$

至于式(3.1.21)，是由于

$$\begin{aligned}\varepsilon\rho(x_\varepsilon,y_\varepsilon)&=\varepsilon\lim_{n\to\infty}\rho(x_\varepsilon,u_n)\\&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(f(x_\varepsilon)-f(u_n))\\&\leqslant f(x_\varepsilon)-\inf_{x\in X}f(x)\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

最后证明式(3.1.22). 用反证法. 倘若不对，$\exists\,\omega\neq y_\varepsilon$，使得

$$f(\omega)\leqslant f(y_\varepsilon)-\varepsilon\rho(y_\varepsilon,\omega), \tag{3.1.26}$$

在式(3.1.25)中令 $m\to+\infty$，便有

$$\varepsilon\rho(y_\varepsilon,u_n)\leqslant f(u_n)-f(y_\varepsilon),$$

从而

$$\begin{aligned}f(\omega)&\leqslant f(u_n)-\varepsilon\rho(y_\varepsilon,\omega)-\varepsilon\rho(y_\varepsilon,u_n)\\&\leqslant f(u_n)-\varepsilon\rho(\omega,u_n),\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

这表明 $\omega\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$，但由式(3.1.23)有

$$2f(u_{n+1})-f(u_n)\leqslant\inf_{x\in S_n}f(x)\leqslant f(\omega),$$

令 $n\to\infty$，得

$$f(y_\varepsilon)\leqslant\lim_{n\to\infty}f(u_n)\leqslant f(\omega).$$

这与式(3.1.26)矛盾. 证毕.

容易得出：

推论 3.1.1　设(X,ρ)是完备度量空间. $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$，下半连续，有下界，并且 $f(x)\neq+\infty$，则 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,x_\varepsilon\in X$，满足

$$f(x_\varepsilon)<\inf_{x\in X}f(x)+\varepsilon,$$

$$f(x)\geqslant f(x_\varepsilon)-\varepsilon\rho(x_\varepsilon,x),\ \forall\,x\in X.$$

当 X 为 Banach 空间，并且 $f\in C^1(X,\mathbf{R})$时，下面的紧性条件对于 f 取极小值起着极为重要的作用.

定义 3.1.8　设 $f\in C^1(X,\mathbf{R})$，如果 $\forall\,\{x_n\}\subset X$，$f(x_n)$有界和 $f'(x_n)\to\theta$ 蕴含着 $\{x_n\}$ 有收敛子列，则称泛函 f 满足 Palais-Smale 条件，简称 P.S. 条件.

作为定理 3.1.7. 的推论我们还有如下推论.

推论 3.1.2　设 X 是 Banach 空间，$f\in C^1(X,\mathbf{R})$满足 P.S. 条件，并且是下方有界的，则 f 达到极小值，即 $\exists\,\bar{x}\in X$，使

$$f(\bar{x})=\inf_{x\in X}f(x).$$

证明 据推论 3.1.1,存在$\{x_n\}\subset X$,使

$$f(x_n)\to\inf_{x\in X}f(x),f(x_n)\leqslant\inf_{x\in X}f(x)+\frac{1}{n},$$

并且

$$f(x)\geqslant f(x_n)-\frac{1}{n}\|x_n-x\|,\forall x\in X.$$

在上式中取 $x=x_n+tv,t>0(t<0)$,其中 $v\in X$ 为任一固定的非零元,可得

$$f(x_n+tv)-f(x_n)\geqslant-\frac{1}{n}\|v\|t\quad\left(f(x_n+tv)-f(x_n)\geqslant\frac{1}{n}\|v\|t\right),$$

从而

$$\frac{f(x_n+tv)-f(x_n)}{t}\geqslant-\frac{1}{n}\|v\|,t>0\quad\left(\frac{f(x_n+tv)-f(x_n)}{t}\leqslant\frac{1}{n}\|v\|,t<0\right),$$

于是令 $t\to0$ 可得

$$f'(x_n)v\geqslant-\frac{1}{n}\|v\|\quad\left(f'(x_n)v\leqslant\frac{1}{n}\|v\|\right),$$

从而

$$\|f'(x_n)\|\leqslant\frac{1}{n},$$

这表明

$$f'(x_n)\to\theta.$$

故由 P.S.条件,存在 x_n 的子列$x_{n_k}\to\bar{x}\in X$,再由 f 的连续性可得

$$f(\bar{x})=\inf_{x\in X}f(x).$$

证毕.

显然当 $\bar{x}$ 是 C^1 泛函 f 在X 上的极小点时,必有 $f'(\bar{x})=\theta$,即 $\bar{x}$ 为f 的临界点.

3.1.4 应用举例

下面的例子表现了变分法在偏微分方程理论中的重要应用.

例 3.1.2 考虑非自治 Hamilton 方程

$$\ddot{x}=\nabla U(x,t)\tag{3.1.28}$$

的 T 周期解,其中 $x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$, $U(x,t)$是 x,t 的 C^1 实值函数,并且对 t 是 T 周期的,$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$,我们有下述定理.

定理 3.1.8 如果 $U(x,t)$对 x 强制,即当 $x\to\infty$时,对 t 一致地有 $U(x,t)\to+\infty$,那么式(3.1.28)有 T 周期解,它是泛函

$$f(x)=\int_0^T\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2+U(x,t)\right)\mathrm{d}t\tag{3.1.29}$$

在所有的 T 周期 C^1 类 n 维向量值函数$x(t)$的集上的极小值点.

证明 用 W_n 记所有绝对连续且在$[0,T]$上使 $\dot{x}(t)\in L^2[0,T]$的 T 周期n 维向量函数 $x(t)$组成的空间,那么 W_n 是以

$$(x,y)=\int_0^T\{x(t)y(t)+\dot{x}(t)\dot{y}(t)\}\mathrm{d}t,\forall x,y\in W_n \tag{3.1.30}$$

为内积的 Hilbert 空间.

若证得 f 在某个 $\bar{x}(t)\in W_n$ 达到极小值,则可知 $\bar{x}(t)$ 是式(3.1.28)的古典解(利用正则性理论,参见[4]).而利用定理3.1.5可知,问题归结为验证 $f(x)$ 的弱下半连续性和强制性.

首先注意到,如果点列 $\{x^{(i)}\}_{i\geqslant1}$ 在 W_n 中弱收敛于 x,则 $\{x^{(i)}\}_{i\geqslant1}$ 在 $[0,T]$ 上一致收敛到 x(应用 Sobolev 嵌入定理,参见[4]),于是泛函 $f_1(x)=\int_0^T U(x,t)\mathrm{d}t$ 是弱连续的.另外,凸二次泛函 $f_2(x)=\int_0^T\dot{x}^2(t)\mathrm{d}t$ 是弱下半连续的.事实上,如果 $\{x^{(i)}\}_{i\geqslant1}$ 在 W_n 中弱收敛到 x,那么由

$$\begin{aligned}f_2(x^{(i)})-f_2(x)&=\int_0^1(x^{(i)}-x,f_2'(x_s^{(i)}))\mathrm{d}s\\&=\int_0^1(x^{(i)}-x,f_2'(x))\mathrm{d}s+\int_0^1(x^{(i)}-x,f_2'(x_s^{(i)})-f_2'(x))\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $x_s^{(i)}\equiv sx^{(i)}+(1-s)x$,据 f_2 的凸性,右端后面一个积分非负,另一方面,因为 $\{x^{(i)}\}_{i\geqslant1}$ 在 W_n 中弱收敛到 x,第一个积分趋于零,于是得出

$$\varliminf_{i\to\infty}f_2(x^{(i)})\geqslant f_2(x),$$

从而泛函 $f=f_1+f_2$ 在 W_n 上下半弱连续.

为证 f 强制,令

$$(Lx,x)=\int_0^T\dot{x}^2(t)\mathrm{d}t,P(x)=\int_0^T U(x,t)\mathrm{d}t.$$

显然这样定义的算子 L 是自共轭 Fredholm 算子,$m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Lx,x)=0$,而且 $\mathrm{Ker}\,L$ 由全体常值 n 维向量值函数组成,所以 W_n 中的元素 $x(t)$ 可唯一表示为 $x(t)=y(t)+c$,其中 $c=\int_0^T x(t)\mathrm{d}t\in\mathbf{R}^n$, $y(t)$ 在 $[0,T]$ 上的平均值为0,从而又有

$$\|y\|_{W_n}\leqslant k\|\dot{y}\|_{L^2},\text{对某个 }k=k(T)>0.$$

因为当 $x\to\infty$ 时,$U(x,t)$ 一致趋于正无穷,所以 $U(x,t)$ 在 $[0,T]$ 上有一致的下界(例如 $-k_0$),于是

$$f(x)=f(c+y)\geqslant\frac{1}{2}\|\dot{y}\|_{L^2}^2-k_0T\geqslant k_1\|y\|_{W_n}^2-k_0T,$$

其中 $k_1=\dfrac{1}{2k^2}$,故当 $\|y\|_{W_n}\to\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$.因而,只需考虑这样的可能性,即当 $|c_i|\to\infty$ 时,序列 $x^{(i)}(t)=y^{(i)}(t)+c_i$ 使 $\{\|y^{(i)}\|_{W_n}\}$ 一致有界.为此令

$$\Omega_i=\left\{t\in[0,T]:|y^{(i)}(t)|>\frac{1}{2}|c_i|\right\},$$

那么 $\int_{\Omega_i}\frac{1}{4}|c_i|^2\mathrm{d}t\leqslant\|y^{(i)}\|_{L^2}^2\leqslant C_0$(某常数),使得 Ω_i 的测度 $\mu(\Omega_i)\leqslant4C_0/|c_i|^2$,$\Omega_i$ 的余集 Ω_i^{C} 的测度 $\mu(\Omega_i^{\mathrm{C}})\geqslant T-4C_0/|c_i|^2$.令 i 足够大,使 $\mu(\Omega_i^{\mathrm{C}})>\frac{T}{2}$,那么在 Ω_i^{C} 上

$$|x^{(i)}(t)|=|y^{(i)}(t)+c_i|\geqslant|c_i|-|y^{(i)}(t)|\geqslant\frac{|c_i|}{2}.$$

根据假设条件,存在函数 $\eta(r)$,使得 $U(x,t)\geqslant\eta(\|x\|)$,且当 $r\to+\infty$时有 $\eta(r)\to+\infty$,又

$$P(x^{(i)})=\int_0^T U(y^{(i)}(t)+c_i,t)\mathrm{d}t=\int_{\Omega_i}+\int_{\Omega_i^C}\geqslant -Tk_0+\eta\left(\frac{|c_i|}{2}\right)\frac{T}{2}.$$

于是当$|c_i|\to\infty$时,$P(x^{(i)})\to+\infty$,故 $f(x)$在 W_n 上强制.证毕.

3.2　最速下降法

对于给定的一个下方有界的泛函 $f:X\to\mathbf{R}$,我们最关心的一个问题就是给出求 f 的极小值的方法.

最速下降法乃是目前解无条件极值问题最普遍使用的方法之一,离散的速降法的要点在于构造这样一种极小化序列,序列中从一项到下一项的方向乃是给定泛函在该项处的最速下降方向即负梯度方向.而连续的速降法则应是极小化序列程序的连续化,使点的走向在每一时刻均为泛函的负梯度方向.下面分别介绍这两种情形.

设 H 是实 Hilbert 空间,$f\in C^1(H,\mathbf{R})$,由 Riesz 线性泛函表示定理,$\forall y^*\in\mathscr{B}(H,\mathbf{R})$,存在唯一的 $y\in H$ 使 $\|y^*\|=\|y\|$,并且 $y^*(x)=(y,x)$,$\forall x\in H$.因此今后我们可将 $\mathscr{B}(H,\mathbf{R})$中的元等同于 H 中的元,这样$\forall x\in H$,我们可认为 $f'(x)\in H$.

现设 $x,z\in H$, $\|z\|=1$,则当 $\alpha>0$ 充分小时,有

$$f(x+\alpha z)-f(x)\approx\alpha f'(x)z=\alpha(f'(x),z).\tag{3.2.1}$$

定义 3.2.1　若 $y\in H$, $\|y\|=1$,使

$$f'(x)y=\inf_{\|z\|=1}f'(x)z=-\sup_{\|z\|=1}(-f'(x)z)=-\|f'(x)\|,$$

则称 y 是泛函f 在点x 处的一个最速下降方向.

很明显,当 $f'(x)\neq\theta$ 时,$y=-f'(x)/\|f'(x)\|$ 就是泛函 f 在x 处的一个最速下降方向.而且由(式 3.2.1)可知,当 $\alpha>0$ 充分小时有

$$f(x+\alpha y)<f(x).$$

现在考虑迭代序列:

$$x_{n+1}=x_n+\varepsilon_{n+1}y_{n+1}(n=0,1,2,\cdots),\tag{3.2.2}$$

其中 y_{n+1}是 f 在点x_n 处的最速下降方向,数值参数 ε_{n+1}称为下降值,它通常可以按以下两个方式选取.

(1) 如果函数 $f(x_n+\alpha y_{n+1})$关于 α 在正半轴上某一点达到极小,就选取这一点为 ε_{n+1},即$f(x_n+\varepsilon_{n+1}y_{n+1})=\min\limits_{\alpha\geqslant0}f(x_n+\alpha y_{n+1})$;

(2) 设 $f'(x_n)y_{n+1}=-\|f'(x_n)\|<0$,这时函数 $f(x_n+\alpha y_{n+1})$至少关于 α 在某区间$[0,\alpha_n']$中下降,此时就取 α_n' 为下降值ε_{n+1}.

选定了确定下降值的方法以后,我们也就相应地得到了序列$\{x_n\}$,这正是离散化的最速下降法的主要算法程式.

如果经过有限次迭代后,有 $f'(x_n)=\theta$,我们就已得到 f 的一个临界点.一般地,我们可

得一个无穷序列$\{x_n\}$,在某些情况下(例如f是凸的),它就是一个极小化序列.

理想的最速下降法应该在每一时刻的变化方向均为负梯度方向，因此它正是极小化序列程序的连续化.

设H是实 Hilbert 空间,$f:H\to\mathbf{R}$为C^1泛函,$F(x)=\text{grad}\ f(x)$, $\forall x\in H$.我们要求方程

$$F(x)=\theta \tag{3.2.3}$$

的解.由定理 3.1.3 知,若$f(x)$在某$x^*\in H$处取得极小值,则x^*必是方程(3.2.3)的解.

关于极小值点x^*的寻求,现在采用这样的想法:从某一初始点$x_0\in H$出发,希望沿H中某曲线$x=x(t)$最后到达x^*点.显然,我们应要求沿此曲线,泛函f的值下降得最快,即在曲线上的每一点x处,曲线前进的方向应恰好是$-\text{grad}\ f(x)=-F(x)$的方向.因此,此曲线$x=x(t)$应满足 Hilbert 空间中的常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-F(x),\\ x(0)=x_0.\end{cases} \tag{3.2.4}$$

不难想象,若$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$存在,则其极限$x^*$就是泛函$f$的极小值点,因而是方程(3.2.3)的解.初值问题(3.2.4)的解$x=x(t)$称为f的最速下降流线.这种利用最速下降流线来研究泛函f的极值点和临界点的方法,称为连续化的最速下降法.

定理 3.2.1　设H为实 Hilbert 空间,$f:H\to\mathbf{R}$为C^1泛函,有下界,$F(x)=\text{grad}\ f(x)$满足局部 Lipschitz 条件,则对$\forall x_0\in H$,初值问题(3.2.4)的唯一解$x=x(t)$的向右最大存在区间为$[0,+\infty)$.

证明　由 Banach 空间上常微分方程理论(2.5),从$F(x)$满足局部 Lipschitz 条件可知,初值问题(3.2.4)对充分小$|t|$存在唯一解$x=x(t)$.设$x=x(t)$的向右极大存在区间为$[0,t^*)$,我们要证$t^*=+\infty$.

沿解曲线$x=x(t)$上考察泛函$f(x(t))$,利用链式法则得

$$\begin{aligned}\frac{df(x(t))}{dt}&=(f'(x(t)),x'(t))\\&=(F(x(t)),x'(t))\\&=-\|x'(t)\|^2,\ \forall t\in[0,t^*).\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

因此$f(x(t))$在$[0,t^*)$上是减函数.再由$f(x)$在H上有下界知,$f(x(t))$是有界的.

对$\forall 0<t_1<t_2<t^*$,由式(3.2.4),式(3.2.5)得

$$\begin{aligned}\|x(t_2)-x(t_1)\|&=\left\|\int_{t_1}^{t_2}x'(t)dt\right\|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|x'(t)\|dt\\&\leqslant\left(\int_{t_1}^{t_2}\|x'(t)\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(-\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}f(x(t))\right]dt\right)^{\frac{1}{2}}(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}\\&=[f(x(t_1))-f(x(t_2))]^{\frac{1}{2}}(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由$f(x(t))$有界知,存在常数$M>0$,使

$$\|x(t_2)-x(t_1)\|\leqslant M(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2.6}$$

若 $t^* < +\infty$,由式(3.2.6)及 H 的完备性知,极限 $\lim\limits_{t \to t^* - 0} x(t) \equiv x^* \in H$ 存在.由 $F(x)$ 在 x^* 处满足局部 Lipschitz 条件,初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -F(x), \\ x(t^*) = x^*, \end{cases}$$

在 $|t - t^*| < \delta$ 充分小时存在唯一解.这表明初值问题(3.2.4)在 $[0, t^* + \delta)$ 上存在解,此与 $[0, t^*)$ 为解的向右极大存在区间矛盾,于是 $t^* = +\infty$.　证毕.

定理 3.2.2　设 H 是实 Hilbert 空间,$f: H \to \mathbf{R}$ 是 C^1 泛函,有下界,并且满足 P.S. 条件.又设 $F(x) = \mathrm{grad}\, f(x): H \to H$ 满足局部 Lipschitz 条件.则 f 在 H 上必取得最小值,即存在 $x^* \in H$,使

$$f(x^*) = \inf_{x \in H} f(x), \tag{3.2.7}$$

从而 x^* 是方程(3.2.3)的解.

证明　由 f 有下界,故 $c = \inf\limits_{x \in H} f(x)$ 是有限数.假设不存在 $x^* \in H$ 使式(3.2.7)成立,则必有结论:存在 $\tau > 0$,使 F 在集 $f_{c+\tau} = \{x \in H \mid f(x) \leqslant c + \tau\}$ 内无零点.因若不然,则存在 $x_n \in f_{c+\frac{1}{n}}$,使得 $F(x_n) = \theta$,据 f 下有界及 P.S. 条件,$\{x_n\}$ 有极限点 x^*,显然 $f(x^*) = c$,即 f 取得最小值 c,矛盾.

现取 $x_0 \in f_{c+\tau}$,考察

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -F(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.2.8}$$

由定理 3.2.1 知,此初值问题的唯一解 $x = x(t)$ 的向右最大存在区间为 $[0, +\infty)$.由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x(t)) = (f'(x(t)), x'(t)) = (F(x(t)), -F(x(t))) = -\|F(x(t))\|^2, \quad \forall t \in [0, +\infty), \tag{3.2.9}$$

$f(x(t))$ 是 $t \in [0, +\infty)$ 上的减函数,因此

$$c \leqslant f(x(t)) \leqslant f(x_0), \ \forall t \in [0, +\infty). \tag{3.2.10}$$

再由式(3.2.9)得

$$c \leqslant f(x(t)) = f(x_0) - \int_0^t \|F(x(s))\|^2 \mathrm{d}s, \ \forall t \in [0, +\infty).$$

易见,积分 $\int_0^{+\infty} \|F(x(s))\|^2 \mathrm{d}s$ 收敛,从而必有

$$\varliminf_{t \to +\infty} \|F(x(t))\| = 0, \tag{3.2.11}$$

即存在 $t_n \to +\infty$,使 $F(x(t_n)) \to \theta$,由式(3.2.10),结合 P.S. 条件知,存在 $\{x(t_n)\}$ 的子列 $x(t_{n_k}) \to \bar{x} \in H$,故 $F(\bar{x}) = \lim\limits_{k \to \infty} F(x(t_{n_k})) = \theta$,注意到式(3.2.10)得

$$f(\bar{x}) = \lim_{k \to \infty} f(x(t_{n_k})) \leqslant f(x_0) \leqslant c + \tau,$$

从而 $\bar{x} \in f_{c+\tau}$,显然与前面的结论矛盾.证毕.

第 4 章　非线性动力系统与分岔

动力系统的概念起源于 19 世纪末对动力学问题中常微分方程的定性研究. 20 世纪 60 年代以来,由于微分几何和微分拓扑研究的发展,动力系统理论取得重大进展. 现在,动力系统理论已是当代最活跃的数学分支之一,并在物理、化学、生态、经济、控制、数值计算等领域得到广泛应用.

动力系统理论主要研究随时间演化的系统的全局定性行为,例如,平衡态,周期运动,长时间的渐近运动等等.

我们也将介绍含参数的动力系统在参数变化时轨线拓扑结构发生突变即产生分岔的一些基本知识.

按照时间以连续或离散两种方式变化,可将动力系统分成连续的和离散的两大类,而这两类系统有着紧密的联系. 为简单计,我们将只讨论在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 D 上定义的动力系统而不去更一般地讨论微分流形上的动力系统.

4.1　基本概念

考虑在开集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的自治系统

$$\dot{x}=f(x),x\in D,t\in\mathbf{R}, \tag{4.1.1}$$

其中 $f:D\to\mathbf{R}^n$ 是 $C^k(k\geqslant1)$映射.

注　这里和以后,我们称一个映射 f 是 C^k 的,是指映射 f 具有连续的 k 阶 F－导数,并且对 $f\in C^k$ 规定:若 k 为 0,则表示 f 本身连续,若 k 为∞,则表示 f 具有任意阶的 F—导数.

对任何 $x_0\in D$,根据常微分方程理论,该系统有唯一的满足 $x|_{t=0}=x_0$ 的 C^k 解 $x=\Phi(t,x_0)$. 设每个这样的解都有存在区间$(-\infty,+\infty)$,并记 $\Phi_t(x)=\Phi(t,x)$,则对固定的 $x\in D$ 和变动的 t,$\Phi_t(x)$给出系统在相空间(即 $\mathbf{R}^n$)中过点 x 的一条轨线;若 x 与 t 都变动,则 $\Phi_t(x)$可视作系统在相空间中一个轨线族. 从常微分方程理论还可知集$\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$有以下性质:

(1)$\Phi_0(x)=x,\forall x\in D$;

(2)$\Phi_s(\Phi_t(x))=\Phi_{s+t}(x),\forall s,t\in\mathbf{R},x\in D$.

易见 Φ_t 对每一 $t\in\mathbf{R}$ 而言是 D 到自身的同胚,其逆为 Φ_{-t},故$\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$是 D 上的单参数变换群,即可逆映射的单参数族按映射的复合运算所成的群,常称其为系统(4.1.1)的流.

由于上述结果的启发,下面可以直接用映射的概念来建立抽象的动力系统概念.

定义 4.1.1　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中开集,$\Phi:\mathbf{R}\times D\to D$ 是一个 $C^k(k\geqslant0)$映射,记 $\Phi_t(x)=\Phi(t,x)$. 若$\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$满足群性质:

(1)$\Phi_0=I$,

(2)$\Phi_s\circ\Phi_t=\Phi_{s+t},\forall s,t\in\mathbf{R}$,

则称$\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$(或 Φ)是 D 上的一个 C^k 连续动力系统或 C^k 流.

类似地，对于任何从 $\mathbf{R}^n$ 中开集 D 到自身的 $C^k(k\geqslant 0)$ 同胚 G，双边序列 $\{G^n\}_{n\in Z}$ 显然满足：

(1) $G^0=I$；

(2) $G^m\circ G^n=G^{m+n},\ \forall\, m,n\in\mathbf{Z}$.

我们称 $\{G^n\}_{n\in Z}$ 是 D 上的（由 G 生成的）C^k 离散动力系统或 C^k 离散流.

在一些发展型偏微分方程或映射问题中，还会遇到半动力系统（单边动力系统）. 只需在前面定义中假设 $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$（或 $\{G^n\}_{n\geqslant 0}$）满足半群性质：

(1) $\Phi_0=I$；

(2) $\Phi_s\circ\Phi_t=\Phi_{s+t},\ \forall\, s,t\in\overline{\mathbf{R}_+}\equiv[0,+\infty)$.

（或 (1) $G^0=I$；

(2) $G^m\circ G^n=G^{m+n},\ \forall\, m,n\in\mathbf{Z}_+\equiv\mathbf{Z}\cap\overline{\mathbf{R}_+}$.）

就可获得 C^k 连续（或离散）半动力系统的定义.

连续与离散动力系统之间，有着密切的关系. 例如，对连续流 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 每隔一段时间 t_0 做一次采样，就可得到一个离散流 $\{g^m\}_{m\in\mathbf{Z}}$，其中 $g=\Phi_{t_0}$，称为一个频闪映射.

我们暂先讨论连续的动力系统.

如果我们称式(4.1.1)中的 C^k 映射 f 为 D 上的一个 C^k 向量场，则可说在一定的条件下，D 上的一个 C^k 向量场 f 通过自治系统 $\dot{x}=f(x)$ 生成一个 C^k 动力系统 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$；另一方面，每一个 $C^k(k\geqslant 1)$ 动力系统 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 也都对应着一个 C^k 向量场 f 或说对应着自治系统 $\dot{x}=f(x)$，其中 $f(x)$ 就是 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi_t(x)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$. 事实上，$\forall\, x_0\in D$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi_t(x_0)}{\mathrm{d}t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi_{t+\Delta t}(x_0)-\Phi_t(x_0)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi_{\Delta t}(\Phi_t(x_0))-\Phi_0(\Phi_t(x_0))}{\Delta t}\\&=\frac{\mathrm{d}\Phi_\tau(\Phi_t(x_0))}{\mathrm{d}\tau}\Big|_{\tau=0}\\&=f(\Phi_t(x_0)),\end{aligned}$$

故 $\Phi_t(x_0)$ 是自治系统 $\dot{x}=f(x)$ 的解，且此解满足 $x|_{t=0}=x_0$. 因此，以后常将向量场和由之生成的动力系统相提并论.

例 4.1.1 线性系统

$$\dot{x}=Ax,\ x\in\mathbf{R}^n,\tag{4.1.2}$$

其中 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 常矩阵，满足初始条件 $x|_{t=0}=x_0\in\mathbf{R}^n$ 的解为 $x=\mathrm{e}^{At}x_0=\Phi_t(x_0)$，则 $\Phi_t=\mathrm{e}^{At}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上一个动力系统，称为相应于向量场 $Ax,x\in\mathbf{R}^n$ 的动力系统或流.

设 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的动力系统，并将它简记作流 Φ_t，它所对应的 D 上的向量场记作 $f(x),x\in D$.

设 $x\in D$，集 $\{\Phi_t(x)\mid t\in\mathbf{R}\}$ 称为流 Φ_t 过点 x 的轨线.

如果 $\bar{x}\in D$ 满足 $\Phi_t(\bar{x})=\bar{x},\ \forall\, t\in\mathbf{R}$，则称 $\bar{x}$ 为流 Φ_t 的平衡点（或不动点），这时显然有 $f(\bar{x})=0$，故 $\bar{x}$ 也称为该向量场 $f(x)$ 的零点（或奇点）.

如果点 $p\in D$ 对某个 $T>0$ 满足 $\Phi_T(p)=p$，则称 p 为流 Φ_t 的周期点. 若存在使 $\Phi_T(p)=p$ 成立的最小正数 T，则称 T 为周期点 p 的最小正周期(简称周期)，也称 p 为流 Φ_t 的周期 T 点.

流 Φ_t 过一周期点的轨线称为 Φ_t 的一个周期轨线(或闭轨). 平衡点和周期轨道是动力系统中非常简单而又十分重要的点集，分别代表着不变的和周期地重复的系统状态，它们也是动力系统不变集的最关键的组成部分.

定义 4.1.2　设集 $F\subset D$ 满足：$\forall x\in F$，成立

$$\Phi_t(x)\in F,\ \forall t\in \mathbf{R},$$

则称 F 为流 Φ_t 的一个不变集. 若某 $E\subset D$ 满足：$\forall x\in E$，$\exists \delta>0$，使当 $|t|<\delta$ 时，$\Phi_t(x)\in E$，则称 E 为流 Φ_t 的一个局部不变集.

$\mathbf{R}^n$ 上连续动力系统的闭的不变集有时称为不变流形. 这里我们介绍 $\mathbf{R}^n$ 中流形的定义如下.

设 $M\subset\mathbf{R}^n$. 如果 M 有一个开覆盖 $\{U_i\}$ 和相应的一族同胚 $\{\Phi_i\}$(个数不限)，其中 $\Phi_i:U_i\to\mathbf{R}^m$，$m$ 是一固定的正整数，使 $\Phi_i(U_i)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的开集，并且对不同的 i,j，复合映射 $\Phi_i\circ\Phi_j^{-1}$ 在 $\Phi_j(U_j)$ 上都是 C^r 的，r 是一固定的非负整数或 ∞，则称 M 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 m 维 C^r 流形. C^0 流形亦称为拓扑流形，$C^r(r\geqslant 1)$ 流形亦称为 C^r 微分流形.

平衡点和周期轨线代表的运动状态可以看作为更广泛的回归运动(即能够无限次地回复到某一特定状态附近的一种运动)的特殊例子. 对于动力系统这些带有回归性质的长期性态的研究，促使人们引进非游荡点和非游荡集以及两种极限集的概念.

定义 4.1.3　设对点 $p\in D$ 的任何邻域 U 和任意 $T>0$，存在 $t>T$ 使得 $U\cap\Phi_t(U)\neq\varnothing$，则称 p 为流 Φ_t 的一个非游荡点. Φ_t 的全体非游荡点所成的集称为 Φ_t 的非游荡集，记作 $\Omega(\Phi)$. 若点 $q\in D\setminus\Omega(\Phi)$，则称 q 为流 Φ_t 的游荡点.

由此定义易见，在非游荡点 p 的任何邻域 U 内总存在一点 x，使得 $t\to+\infty$ 时，轨线 $\Phi_t(x)$ 返回此邻域 U 无限多次. 还易见流 Φ_t 的非游荡集 $\Omega(\Phi)$ 是一个闭的不变集. 此外，流 Φ_t 的平衡点和闭轨都含于 $\Omega(\Phi)$.

定义 4.1.4　在过点 x 的轨线 $\{\Phi_t(x)\mid t\in\mathbf{R}\}$ 上，如果存在点列 $\{\Phi_{t_i}(x)\}_{i\geqslant 1}$，使得 $t\to\infty$ 时，$t_i\to+\infty(-\infty)$ 且 $\Phi_{t_i}(x)\to p$，则称点 p 为此轨线的一个 ω 极限点(α 极限点)，并记作 $p\in\omega(x)(p\in\alpha(x))$，这里 $\omega(x)(\alpha(x))$ 表示过点 x 的轨线的全部 ω 极限点(α 极限点)所成的集，称为此轨道的 ω 极限集(α 极限集).

由此定义不难证明：

$$\omega(x)=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant\tau}\Phi_t(x)},$$

$$\alpha(x)=\bigcap_{\tau\leqslant 0}\overline{\bigcup_{t\leqslant\tau}\Phi_t(x)},$$

并且它们都是流 Φ_t 的闭的不变集.

4.2　平衡点的局部性态

4.2.1　平衡点的分类

设 $x\in\mathbf{R}^n$ 是相应于向量场 f 的 C^1 连续动力系统 Φ_t 的平衡点，注意到 $\forall h\in\mathbf{R}^n$，$s\neq 0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\Phi_t(\bar{x}+sh)-\Phi_t(\bar{x})}{s}\right)=\frac{f(\Phi_t(\bar{x}+sh))-f(\Phi_t(\bar{x}))}{s},$$

则知 $\Phi_t(x)$在 $\bar{x}$ 点处沿h 方向的 G—微分 $\mathrm{D}\Phi_t(\bar{x})h$ 适合方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{D}\Phi_t(\bar{x})h)=\mathrm{D}f(\bar{x})(\mathrm{D}\Phi_t(\bar{x})h),\mathrm{D}\,\Phi_0(\bar{x})h=h,$$

从而根据线性方程理论有

$$\mathrm{D}\Phi_t(\bar{x})h=\mathrm{e}^{\mathrm{D}f(\bar{x})t}h.$$

由 Taylor 展开,当 $\|h\|$ 充分小时,有

$$\begin{aligned}\Phi_t(\bar{x}+h)&\approx\Phi_t(\bar{x})+\mathrm{D}\Phi_t(\bar{x})h\\&=\bar{x}+\mathrm{e}^{\mathrm{D}f(\bar{x})t}h.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{D}n(\bar{x})$是实 $n\times n$ 方阵,存在实典型形 J 和非奇异矩阵Q 使得 $\mathrm{D}f(\bar{x})=Q^{-1}JQ$,其中 $J=\mathrm{diag}\{A_1,A_2\cdots,A_p\}$,这里 $A_j(1\leqslant j\leqslant p)$相应于 $\mathrm{D}f(\bar{x})$的实特征值 λ_j 或者共轭复特征值$a_j\pm b_j\mathrm{i}(a_j,b_j\in\mathbf{R},b_j\neq0)$,而有形式

$$\begin{bmatrix}\lambda_j & & & 0\\ 1 & \ddots & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_j\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}a_j & -b_j & & & & 0 & 0\\ b_j & a_j & & & & 0 & 0\\ 1 & 0 & \ddots & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & a_j & -b_j\\ 0 & 0 & & 0 & 1 & b_j & a_j\end{bmatrix},$$

从而 J 的主对角线元素是矩阵 $\mathrm{D}f(\bar{x})$的特征值的实部. 这时若 $z(t)$是 $\dot{z}=Jz,z(0)=Qh$ 的解,则 $y(t)=Q^{-1}z(t)$是 $\dot{y}=\mathrm{D}f(\bar{x})y,y(0)=h$ 的解,从而 $\Phi_t(\bar{x}+h)$在 $\|h\|$ 充分小时可由 $\bar{x}+Q^{-1}z(t)$亦即 $\bar{x}+Q^{-1}\mathrm{e}^{Jt}Qh$ 来近似,于是我们仿照对线性系统 $\dot{x}=Ax$ 的平衡点分类的方式根据 $\mathrm{D}f(\bar{x})$的特征值的情况来对平衡点 $\bar{x}$ 进行分类.

定义 4.2.1 设 $\bar{x}$ 是相应于向量场f 的连续动力系统 Φ_t 的平衡点,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathrm{D}f(\bar{x})$的 n 个特征值.

(1)称 $\bar{x}$ 是双曲(型)的,若 $\mathrm{Re}\,\lambda_k\neq0,k=1,2,\cdots,n$;

(2)称 $\bar{x}$ 为中心,若 $\bar{x}$ 不是双曲的平衡点;

(3)称 $\bar{x}$ 为汇,若 $\mathrm{Re}\,\lambda_k<0,k=1,2,\cdots,n$;

(4)称 $\bar{x}$ 为源,若 $\mathrm{Re}\,\lambda_k>0,k=1,2,\cdots,n$;

(5)称 $\bar{x}$ 为鞍点,若 $\bar{x}$ 为既不是源也不是汇的双曲平衡点;

(6)称 $\bar{x}$ 为结点,若 $\bar{x}$ 是汇或源,且 λ_k 是实数,$k=1,2,\cdots,n$;

(7)称 $\bar{x}$ 为焦点,若 $\bar{x}$ 是汇或源,且存在某 λ_k 不为实数;

(8)若 $\bar{x}$ 是汇,则称其为稳定的(渐近稳定的)或吸引的平衡点;

(9)若 $\bar{x}$ 是源,则称其为不稳定的或排斥的平衡点.

从下面介绍的 $\mathbf{R}^2$ 上线性自治系统的相图的各种情况,可以看到上述诸名称的合理性.这里所谓相图就是画有动力系统在相空间里一些代表性的轨线的图.

设 $\dot{x}=Ax$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的线性自治系统,则根据线性代数理论,总可以把 $\dot{x}=Ax$ 通过坐标变

换化成$\dot{y}=Jy$，其中 J 必属于下述四种情况之一：

(1) $J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R},\lambda_1\neq\lambda_2$；

(2) $J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$，$\lambda\in\mathbf{R}$；

(3) $J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\lambda\in\mathbf{R}$；

(4) $J=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$，$a,b\in\mathbf{R},b\neq0$.

相应的解是

(1) $y(t;y_0)=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}y_0$；

(2) $y(t;y_0)=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}y_0$；

(3) $y(t;y_0)=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}y_0$；

(4) $y(t;y_0)=e^{at}\begin{pmatrix}\cos bt & -\sin bt\\ \sin bt & \cos bt\end{pmatrix}y_0$.

从而在 $y=0$ 附近，可根据这些 λ 或 a 和 b 的取值情况画出系统的相图.

(1) $J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$，$\lambda_2<\lambda_1<0$ 时，e^{Jt} 的相图如图 4.2.1，

这时原点是结点，且是系统的汇；

$J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$，$\lambda_2<0<\lambda_1$ 时，e^{Jt} 的相图如图 4.2.2，这时原点是鞍点.

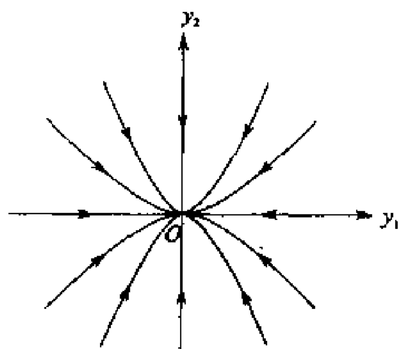


图 4.2.1

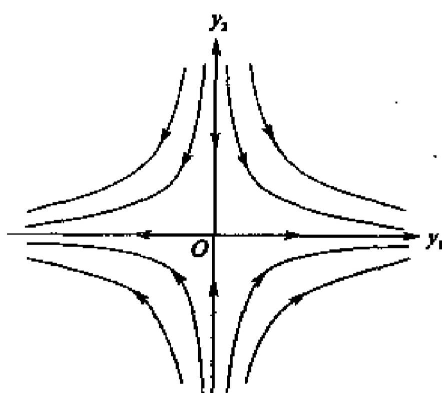


图 4.2.2

(2) $J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$，$\lambda>0$ 时，e^{Jt} 的相图如图 4.2.3，这时原点称为临界结点，且是系统的源.

(3)$J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $\lambda<0$ 时, e^{Jt} 的相图如图 4.2.4,这时原点称为非正常结点,且是系统的汇.

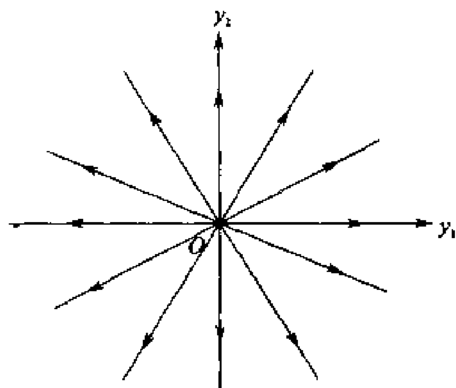


图 4.2.3

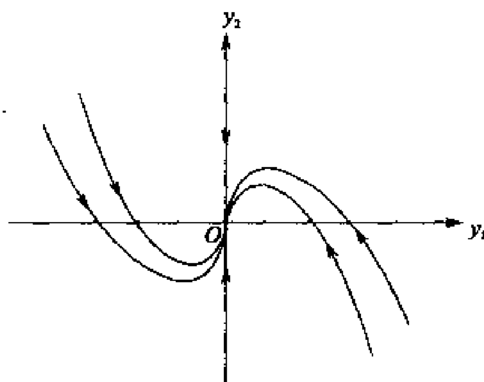


图 4.2.4

(4)$J=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$, $a=0,b>0$ 时, e^{Jt} 的相图如图 4.2.5,这时称原点为中心. $a<0,b>0$ 时, e^{Jt} 的相图如图 4.2.6,这时称原点为吸引的(或稳定的)焦点.

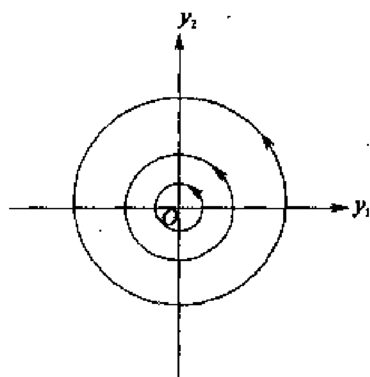


图 4.2.5

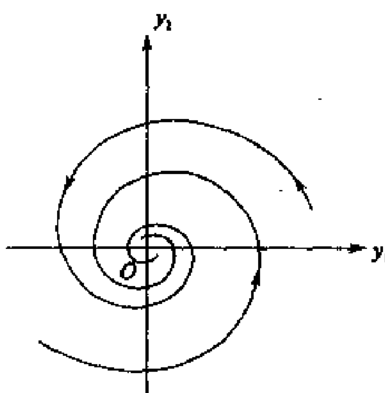


图 4.2.6

4.2.2 Hartman 定理

设 $\bar{x}$ 是系统 $\dot{x}=f(x)$ 的平衡点,则系统 $\dot{x}=Df(\bar{x})x$ 称为原系统在 $\bar{x}$ 处的线性化或近似线性系统. 一般地,称 $\dot{x}=f(x_0)+Df(x_0)x$ 为系统 $\dot{x}=f(x)$ 在 x_0 处的一阶近似系统.

上述关于平衡点的分类是借助于平衡点处的线性化而得到的,自然要问,平衡点附近轨线的拓扑性态在线性化后是否被保持? 当平衡点是双曲型的情况下,有下述完美的结果.

定理 4.2.1(Hartman) 若 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$ 是向量场 f 生成的连续动力系统 Φ_t 的双曲型平衡点,则存在 $\bar{x}$ 的邻域 U 和同胚映射 $h:U\to h(U)\subset\mathbf{R}^n$,使得

$$h(\bar{x})=0, \text{并且若 } x\in U \text{ 且 } \Phi_t(x)\in U, h(\Phi_t(x))=e^{Df(\bar{x})t}h(x).$$

此定理的证明可见[25],定理内容如图 4.2.7 所示.

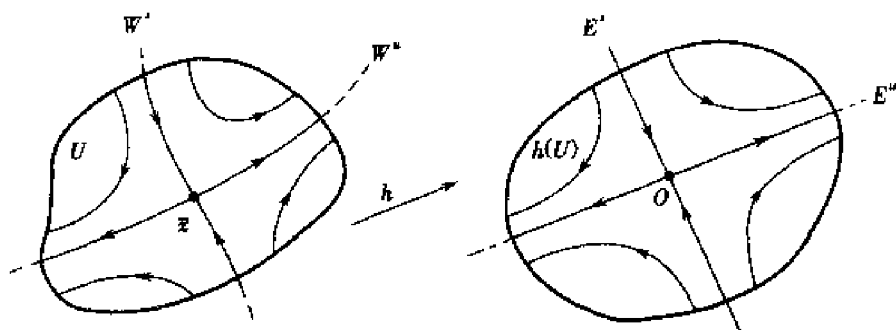


图 4.2.7

现在假设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 作为 $Df(\bar{x})$ 的特征值按照实部小于、大于或等于 0 分成个数分别为 n_s,n_u 和 n_c 的三组，并 $v_1,v_2,\cdots,v_{n_s},u_1,u_2,\cdots,u_{n_u}$ 和 $w_1,w_2,\cdots,w_{n_c}$ 分别是相应的线性无关的广义特征向量的组，则称

$$E^s \equiv \text{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_{n_s}\},$$

$$E^u \equiv \text{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_{n_u}\},$$

$$E^c \equiv \text{span}\{w_1,w_2,\cdots,w_{n_c}\}$$

分别是系统 Φ_t 在平衡点 $\bar{x}$ 的稳定子空间、不稳定子空间和中心子空间.

注　矩阵 A 的相应于特征值 λ 的广义特征向量是指对某个 $k\in\mathbf{N}$ 满足 $(A-\lambda I)^k v=\theta$ 的非零向量 v.

动力系统 Φ_t 在平衡点 $\bar{x}$ 处的局部稳定流形和局部不稳定流形，分别定义为

$$W_{\text{loc}}^s(\bar{x})=\{x\in U\mid \Phi_t(x)\to\bar{x},t\to+\infty,\text{且 }\Phi_t(x)\in U,t\geqslant 0\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(\bar{x})=\{x\in U\mid \Phi_t(x)\to\bar{x},t\to-\infty,\text{且 }\Phi_t(x)\in U,t\leqslant 0\},$$

其中 U 是 $\mathbf{R}^n$ 中 $\bar{x}$ 的某个邻域；而整体稳定流形和整体不稳定流形则分别定义为

$$W^s(\bar{x})=\bigcup_{t\leqslant 0}\Phi_t(W_{\text{loc}}^s(\bar{x})),$$

和

$$W^u(\bar{x})=\bigcup_{t\geqslant 0}\Phi_t(W_{\text{loc}}^u(\bar{x})).$$

例 4.2.1　对于线性系统 $\dot{x}=Ax,x\in\mathbf{R}^n$ 其中 A 为一 $n\times n$ 常矩阵，显然有 $W^s(O)=E^s$ 和 $W^u(O)=E^u$.

例 4.2.2 平面系统 $\dot{x}=x,\dot{y}=-y+x^2,(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 有唯一的双曲平衡点 O，在点 O 处近似线性系统为 $\dot{x}=x,\dot{y}=-y,(x,y)\in\mathbf{R}^2$，在点 O 处系统的稳定和不稳定子空间分别是

$$E^s=\{(x,y):x=0\},$$

和

$$E^u=\{(x,y):y=0\}.$$

根据原系统的方程可求出轨线族 $y(x)=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{c}{x}$，$c$ 为任意常数，和轨线 $x=0$，再结合向量场 $(x,-y+x^2),(x,y)\in\mathbf{R}^2$，的情况可见：系统在点 O 处稳定流形和不稳定流形分别是

$$W^s(O)=\{(x,y):x=0\}$$

和

$$W^u(O)=\left\{(x,y):y=\frac{x^2}{3}\right\}.$$

如果动力系统 Φ_t 的一个(局部)不变流形与 $\bar{x}$ 处中心子空间的维数相同,并且在 $\bar{x}$ 处与之相切,则称之为一个整体(局部)中心流形.一般地,在一个平衡点 $\bar{x}$ 处的中心流形不必是唯一的.

例 4.2.3 考虑系统:

$$\dot{x}=x^2,\dot{y}=-y,(x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

原点(0,0)是这个系统的中心,x 轴是中心子空间,y 轴是稳定子空间也是稳定流形.这个系统的满足初始条件 $(x,y)|_{t=0}=(x_0,y_0)$ 的轨线由

$$x(t)=x_0/(1-tx_0),y(t)=y_0\mathrm{e}^{-t}$$

给出,消去 t 之后,有

$$y(x)=(y_0\mathrm{e}^{-1/x_0})\mathrm{e}^{1/x}.$$

由此可见,在左半平面 $x<0$ 上的所有轨线当 $x\to0$ 时都趋于原点,且 k 阶导数 $y^{(k)}(x)\to0,k=1,2,3,\cdots$;在右半平面 $x>0$ 上,只有一条轨线当 $x\to0$ 时趋于原点,此轨线即正半 x 轴,将正半 x 轴与左半平面上任一条轨线相连,即得一个 C^∞ 中心流形,这样的中心流形有无限多个.

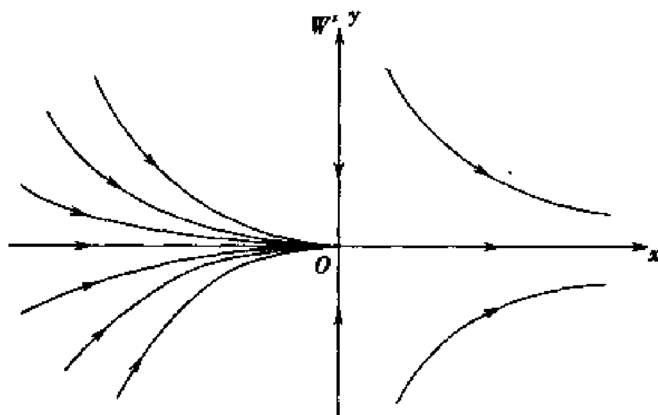


图 4.2.8

对于双曲型平衡点,有下面的定理,证明可见[25].

定理 4.2.2 设 Φ_t 是向量场 f 生成的连续动力系统,$\bar{x}$ 是其双曲型平衡点,则存在 $\bar{x}$ 处局部稳定流形 $W^s_{loc}(\bar{x})$ 和局部不稳定流形 $W^u_{loc}(\bar{x})$,分别与线性系统 $\dot{x}=\mathrm{D}f(\bar{x})x$ 的稳定子空间 E^s 和不稳定子空间 E^u 维数相等,并且在 $\bar{x}$ 处相切,同时它们具有与 f 相同的光滑性.

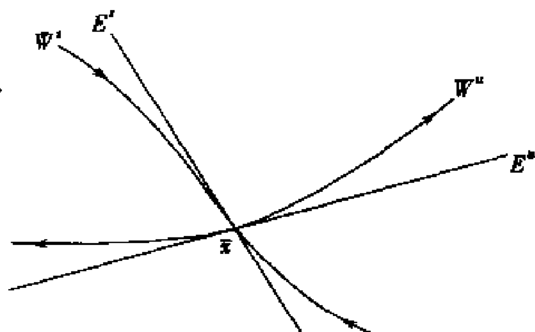


图 4.2.9

此定理内容如图 4.2.9 所示.

在非双曲型平衡点 $\bar{x}$ 附近的轨线结构可能更加复杂,而一般不能直接利用线性化的方法来描述.

4.2.3　中心流形定理

下面介绍的中心流形定理提供了一种降低所研究的系统维数的方法,因此在研究动力系统的分岔问题等方面有重要作用.定理的证明可见[25]和[5].

定理 4.2.3　设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上一个 $C^r(1\leqslant r<\infty)$ 向量场,原点 O 是 f 生成的流 Φ_t 的非双曲型平衡点,$Df(0)$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 记

$$\sigma_s=\{\lambda_k \mid \mathrm{Re}\lambda_k<0\},$$

$$\sigma_u=\{\lambda_k \mid \mathrm{Re}\lambda_k>0\},$$

$$\sigma_c=\{\lambda_k \mid \mathrm{Re}\lambda_k=0\},$$

且相应的稳定、不稳定和中心子空间分别为 E^s、E^u 和 E^c,则在点 O 的某个邻域内唯一地存在过点 O 并在该处分别与 E^s 和 E^u 相切的 C^r 局部稳定流形 $W^s_{loc}(O)$ 和 C^r 局部不稳定流形 $W^u_{loc}(O)$,且在这个邻域内还存在至少一个经过点 O 并在 O 处与 E^c 相切的 C^r 局部中心流形 $W^c_{loc}(O)$. 进一步,系统 $\dot{x}=f(x)$ 在点 O 邻近可局部拓扑等价于下述系统:

$$\dot{\tilde{x}}=\tilde{f}(\tilde{x}),\dot{\tilde{y}}=-\tilde{y},\dot{\tilde{z}}=\tilde{z},(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\in E^c\times E^s\times E^u,$$

其中 $\tilde{f}$ 满足 $D\tilde{f}(O)$ 的特征值都具有零实部,且 $\tilde{f}$ 在点 O 邻近是 C^r 的.

注　此定理可推广到无限维空间的情形,但结论中局部中心流形的光滑性要改为 C^{r-1}.

此定理内容如图 4.2.10 所示.

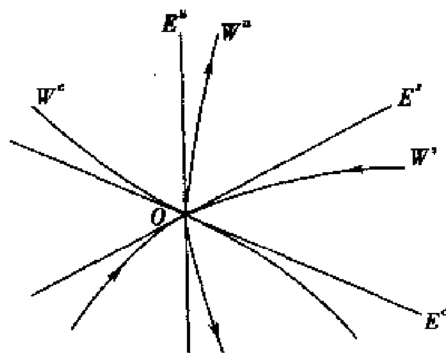


图 4.2.10

定理中所述的"局部拓扑等价"即是"通过局部同胚对应",严格地说有下述定义.

定义 4.2.2　设 U,V 为 $\mathbf{R}^n$ 中非空开集,f 和 g 分别是 U 和 V 上 C^r 向量场,它们分别生成流 Φ_t 和 Ψ_t. 如果存在一个同胚 $h:U\to V$,把流 Φ_t 的轨线映射为 Ψ_t 的轨线,并保持时间定向,则称向量场 f 与 g 也称流 Φ_t 与流 Ψ_t 是拓扑等价的,即对任何 $x\in U$ 成立:

$$\forall t_1\geqslant 0,\exists t_2\geqslant 0 \text{ s.t. } h(\Phi_{t_1}(x))=\Psi_{t_2}(h(x)).$$

此外,若 h 保持时间不变,即总有 $t_2=t_1$,则称上述拓扑等价为拓扑共轭.

在许多情形中,我们只关心平衡点附近的轨线性态. 如果上述拓扑等价(或共轭)关系仅在平衡点的某个邻域内成立,则称为局部拓扑等价(或局部拓扑共轭).

4.3　吸引子

设 F 是流 Φ_t 的一个不变集. 如果对于 F 的每个 ε 邻域 $U_\varepsilon=\{x:d(x,F)<\varepsilon\}$,存在 F 的一个 δ 邻域 U_δ,使得对任何 $x\in U_\delta$,有 $\Phi_t(x)\in U_\varepsilon$, $t\geqslant 0$,则称 F 是局部稳定的. 如果 F 是局部稳定的,并且存在 F 的一个 α 邻域 U_α,使得对任何 $x\in U_\alpha$,当 $t\to+\infty$ 时,$d(\Phi_t(x),F)\to 0$,则称 F 是局部渐近稳定的.

注　这里和以后,用记号 $d(a,B)$ 表示点 a 与子集 B 的距离 $\inf\{d(a,b):b\in B\}$.

若 A 是流 Φ_t 的一个闭的不变集，且 A 是局部渐近稳定的，则称 A 为局部吸引集，集 $D=\{x:\lim_{t\to+\infty} d(\Phi_t(x),A)=0\}$ 称为 A 的吸引域.

如果 A 是流 Φ_t 的一个局部吸引集，并且存在一条轨线 $\Phi_t(x_0)$ 在 A 中稠密，则称 A 是流 Φ_t 的一个局部吸引子.

若可把上述邻域 U_a 换成整个 $\mathbf{R}^n$，则可分别给出 A 是全局(或整体)渐近稳定的，A 是全局吸引集和 A 是全局吸引子的相应定义.

当一个集合中含有一条稠密的轨线，也称此集是拓扑可传的. 在此集中任一点处的任一邻域内，都有这条轨线经过.

例 4.3.1 图 4.3.1 所示系统：$\dot{x}=x-x^3,\dot{y}=-y$，有平衡点 $A(-1,0)$. $O(0,0)$ 和 $B(1,0)$，其中 A 和 B 都是稳定的结点也都是局部吸引子，O 是鞍点. 此系统有局部吸引集 $\{A,B\}$，整体吸引集为连结 AB 的线段 $\{(x,y):-1\leqslant x\leqslant 1,y=0\}$，$\{A,O,B\}$ 是非游荡集. 该系统没有整体吸引子.

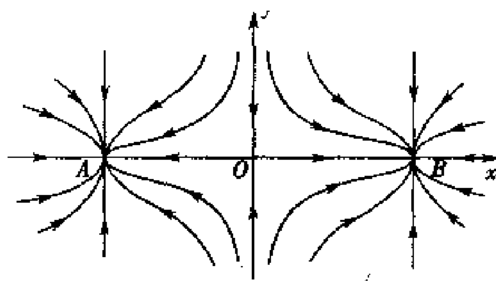


图 4.3.1

显然，平衡点是汇时，它就是一个吸引子，它与下面所述的周期吸引子，此外还有下面介绍的环面吸引子等，都属于普通吸引子类. 另一类吸引子出现于混沌运动问题，因具有分形维数而被称为奇怪吸引子.

以下凡说到“稳定性”时，都指局部的稳定性.

设 $x=\varphi(t)$ 是系统 $\dot{x}=f(x),x\in D\subset\mathbf{R}^n$ 的一个周期 T 解，记 Γ 为由 $x=\varphi(t)$ 给出的周期轨道，即

$$\Gamma=\{x:x=\varphi(t),0\leqslant t<T\}.$$

如果 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，使得对满足 $d(x_0,\Gamma)<\delta$ 的任何 x_0，$\dot{x}=f(x)$ 满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t)$ 在 $t\geqslant t_0$ 时有定义且满足 $d(x(t),\Gamma)<\epsilon$，则称周期解 $\varphi(t)$ 或闭轨 Γ 是轨道稳定的.

若 $x=\varphi(t)$ 是系统 $\dot{x}=f(x),x\in D\subset\mathbf{R}^n$ 的一个轨道稳定的周期 T 解，且存在 $\sigma>0$ 使得对满足 $d(x_0,T)<\sigma$ 的任何 x_0，$\dot{x}=f(x)$ 满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t)$ 满足 $\lim_{t\to+\infty} d(x(t),\Gamma)=0$，则称周期解 $\varphi(t)$ 或闭轨 Γ 是轨道渐近稳定的.

若进一步，对当 $t\to+\infty$ 时满足 $d(x(t),\Gamma)\to 0$ 的每个解 $x(t)$，存在一个常数 $\bar{t}\in[0,T)$，使得

$$\lim_{t\to+\infty}\|x(t)-\varphi(t+\bar{t})\|=0,$$

则称周期解 $\varphi(t)$ 或闭轨 Γ 还是相位渐近稳定的，并称 Γ 为一个周期吸引子，$\bar{t}$ 为渐近相位.

从几何上说，周期吸引子 Γ 附近的轨线当 $t\to+\infty$ 时不仅越来越趋近 Γ，而且与 Γ 是渐近“同步”的.

下面介绍一个比周期轨道更一般些的不变流形——环面，当这个环面是吸引集时，它就是一个环面吸引子.

首先，若 $\Phi_t(\bar{x})$ 是一个周期 T 轨道，则可写 $\Phi_t(\bar{x})=\Phi_t(\bar{x},\omega t)$，其中 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$，$\Phi(\bar{x},\cdot)$ 是

以 2π 为周期的某个从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射.可以把此周期轨道看成周长为 2π 的一个圆周 S^1,也可看成一个以 ω 为频率的简谐振动.自然可以考虑有两个这样的运动发生迭加,并且它们的频率之比是一个无理数,即考虑 $\Phi_t(\bar{x})=\Phi_t(\tilde{x},\omega_1 t,\omega_2 t)$,其中 Φ 对第二和第三个变元都以 2π 为周期,而 $\frac{\omega_1}{\omega_2}\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$,则在相空间 $\mathbf{R}^n$ 中,$\Phi_t(\bar{x})$ 表示一根螺旋形曲线,称为一个拟周期轨道,因为它永不返回到曾经经过的点;又因为 ω_1/ω_2 是无理数的缘故,它将沿着一个环面无限地缠绕下去,后者是这轨道的闭包,因而此环面是拓扑可传的.

4.4　离散动力系统和庞卡莱(Poincaré)映射

为简便计,由(C^r 微分)同胚 G 生成的离散动力系统 $\{G^n\}_{n\in \mathbf{Z}}$,往往直接称为"($C^r$ 微分)同胚 G".

关于连续动力系统与离散动力系统的关系,我们曾介绍过对连续动力系统进行离散采样可得到离散动力系统,后面将介绍通过庞卡莱映射把一个连续流转化成一个离散流来研究.此外,连续动力系统由微分方程表出,而微分方程的差分解法也可引出离散动力系统.

反过来,若给定 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上一个同胚 G,我们可以通过"扭扩"(suspension)的方法得出高一维空间上的某个连续流,称为扭扩流,而 G 可看成由扭扩流通过庞卡莱映射所得.事实上,我们在 $\mathbf{R}\times D$ 上定义一个流:

$$\Phi_t(p,x)=(t+p,x),(p,x)\in\mathbf{R}\times D,$$

再在 $\mathbf{R}\times D$ 上定义如下等价关系 $\sim$:

$$(p,x)\sim(q,y)\Leftrightarrow p-q=n\in\mathbf{Z}\text{ 且 }y=G^n(x).$$

记 $\tilde{D}=\mathbf{R}\times D/\sim$,则易验证:若 $(p,x)\sim(q,y)$,则 $\Phi_t(p,x)\sim\Phi_t(q,y)$.于是 Φ_t 诱导出 $\tilde{D}$ 上一个流 $\tilde{\Phi}_t$,这就是扭扩流.当我们把 D 和 $\{0\}\times D/\sim$ 等同看待,G 即可看作是 $\Sigma=\{0\}\times D/\sim$ 上的同胚,而流 $\tilde{\Phi}_t$ 从 Σ 上任一点 x 出发的轨线都要返回 Σ,其中第一次回归于 Σ 的交点就是 $G(x)$.按照后面介绍的庞卡莱映射的定义,这就是说,G 是流 $\tilde{\Phi}_t$ 关于截面 Σ 的庞卡莱映射.

由此可见,连续流与离散流有着密切的关系.

由于对微分同胚的研究一般比较直观简洁,故人们一般先在微分同胚的研究中发现定理,然后再对连续流进行相应的讨论.人们也常将连续流离散化,通过对较低维的离散动力系统的研究来获知原连续流的有关性质.

类似连续流的情况,可对离散流建立相应的概念.

设 $G:D\subset\mathbf{R}^n\to D$ 是一个同胚(C^r 微分同胚),$x\in D$,称点集

$$\{G^k(x):k\in\mathbf{Z}\}$$

为离散流 G 的过点 x 的轨线.

如果存在正整数 m 使

$$G^m(x)=x,$$

则称 x 为 G 的周期点.使上述等式成立的最小正整数 m 称为 x 的周期,这时称 x 为 G 的周期 m 点.过周期点的轨线称为周期轨线.G 的周期 1 点称为 G 的不动点.

对于 G 的不动点 $\bar{x}$,如果对 $\bar{x}$ 的任一邻域 U,都存在 $\bar{x}$ 的一个邻域 U_1,使得对一切 $x\in$

U_1 和 $k\geqslant 0$ 有

$$G^k(x)\subset U,$$

则称 $\bar{x}$ 是稳定的，反之是不稳定的. 如果 $\bar{x}$ 是稳定的不动点，且存在 $\bar{x}$ 的邻域 U，使对一切 $x\in U$ 有

$$\lim_{k\to\infty} G^k(x)=\bar{x},$$

则称 $\bar{x}$ 是渐近稳定的.

若有集 $A\subset\mathbf{R}^n$ 满足对任何 $x\in A$ 和整数 k，有

$$G^k(x)\in A,$$

则称 A 为 G 的不变集.

点集

$$\omega(x)=\bigcap_{m\geqslant 0}\overline{\{G^k(x)\mid k\geqslant m\}}$$

和

$$\alpha(x)=\bigcap_{m\geqslant 0}\overline{\{G^{-k}(x)\mid k\geqslant m\}},$$

分别称为 G 的过点 x 的轨线的 ω 极限集和 α 极限集.

若对点 x 的任何邻域 U 都存在整数 $k\neq 0$，使得 $G^k(U)\cap U\neq\varnothing$，则称 x 为 G 的非游荡点. G 的全体非游荡点的集合称为 G 的非游荡集，记作 $\Omega(G)$.

易知不动点、周期轨线 $\omega(x)$，$\alpha(x)$，$\Omega(G)$ 等都是不变集.

两个同胚（C^r 微分同胚）F 和 $G:D\to D$ 称为是拓扑共轭的（C^r 共轭的），如果存在一个同胚（C^r 微分同胚）$h:D\to D$，使得

$$h\circ F=G\circ h.$$

称 F 和 G 是局部拓扑共轭的（局部 C^r 共轭的），如果上述关系是在对应的不动点的一个邻域内成立.

显然，上述“共轭”是同胚间的一种等价关系，且拓扑共轭的两个离散流有相同的轨线拓扑结构.

设 G 是一个微分同胚，$\bar{x}$ 是其不动点，则由

$$\mathrm{D}G^k(\bar{x})=\mathrm{D}G(G^{k-1}(\bar{x}))\mathrm{D}G(\mathrm{D}^{k-2}(\bar{x}))\cdots\mathrm{D}G(\bar{x})=(\mathrm{D}G(\bar{x}))^k$$

得出：当 $\xi\in\mathbf{R}^n$ 范数充分小时，

$$G^k(\bar{x}+\xi)\approx G^k(\bar{x})+\mathrm{D}G^k(\bar{x})\xi=\bar{x}+(\mathrm{D}G(\bar{x}))^k\xi.$$

可见 $(\mathrm{D}G(\bar{x}))^k$ 与连续动力系统 Φ_t 的 $e^{\mathrm{D}f(\bar{x})t}$ 地位相同.

设 $\mathrm{D}G(\bar{x})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，我们称 $\bar{x}$ 为 G 的双曲平衡点，若 $|\lambda_i|\neq 1$，$i=1,2,\cdots,n$；称 $\bar{x}$ 为 G 的鞍点，若 $\bar{x}$ 是 G 的双曲平衡点，且存在 i_0 和 j_0，使

$$|\lambda_{i_0}|<1<|\lambda_{j_0}|.$$

类似地可以按照连续动力系统的情形，给 $\bar{x}$ 下其他定义，也可以类似地定义离散流 G 在 $\bar{x}$ 处的稳定子空间 E^s、不稳定子空间 E^u 和中心子空间 E^c，并且定义 G 在 $\bar{x}$ 处的局部或整体的稳定流形、不稳定流形和中心流形.

同样可以类似地证明如下结果.

定理 4.4.1(Hartman)　设 $\bar{x}$ 是微分同胚 G 的一个双曲平衡点，则 G 在点 $\bar{x}$ 的某邻域和 $\mathrm{D}G(\bar{x})$ 是拓扑共轭的，即存在 $\bar{x}$ 的一个邻域 V 和同胚映射 $h:V\to h(V)\subset\mathbf{R}^n$，使得

$$h(\bar{x})=0$$

且

$$h(G^k(x))=(\mathrm{D}G(\bar{x}))^k h(x),\ \forall x\in V,k\in\mathbf{Z},G^k(x)\in V.$$

定理 4.4.2　设 $\bar{x}$ 是 C^r 微分同胚 G 的一个双曲平衡点，则存在属于 C^r 类的局部稳定流形 $W^s_{loc}(\bar{x})$ 和局部不稳定流形 $W^u_{loc}(\bar{x})$，它们在 $\bar{x}$ 处与 E^s 和 E^u 分别相切且维数分别与 E^s 和 E^u 的维数相同.

关于中心流形方面在离散动力系统情况下的结果也几乎是平行于连续动力系统情况的，可以参见[50].

下面介绍庞卡莱映射.

设 Φ_t 是 $\mathbf{R}^n$ 上 $C^r(r\geqslant 1)$ 向量场 f 生成的流，Σ 为 $\mathbf{R}^n$ 中 $(n-1)$ 维超曲面 H 的一部分，对任何 $x\in\Sigma$，$f(x)$ 不与 Σ 相切. 称这种 Σ 为流 Φ_t 的一个截面，并称流 Φ_t 与 Σ 横截相交. 只要 x 不是流 Φ_t 的平衡点，总可作出过 x 的一个截面.

设 Γ 是 Φ_t 的一条闭轨，周期为 T. 过任一点 $p\in\Gamma$ 作一适当的截面 Σ 使 Γ 与 Σ 仅交于 p. 由于 $\Phi_T(p)=p\in\Sigma$，即闭轨 Γ 从 p 点出发后经时间 T 第一次回到 Σ 上，根据流的连续性，必存在点 p 在 Σ 中的某个邻域 $U\subset\Sigma$，使 Φ_t 的从任一 $q\in U$ 出发的轨线经时间 $\tau(q)$ 第一次回到 Σ 上，于是定义第一回归映射，即庞卡莱映射，为映射 $P:U\to\Sigma$，使得

$$P(q)=\Phi_{\tau(q)}(q)\in\Sigma,\ \forall q\in U,$$

这里 $\tau(q)$ 是一个连续可微的函数. 一般而言，当 $q\neq p$ 时，$\tau(q)\neq\tau(p)$，但当 $q\to p$ 时有 $\tau(q)\to T$.

这样，依 Φ_t 可在上述截面 Σ 上点 p 的邻域 V 上得出一个离散流 P，闭轨 Γ 上的点 p 是 P 的不动点. 对流的闭轨的研究就可以归结为对庞卡莱映射 P 的不动点的研究.

定理 4.4.3　设 Γ 为 Φ_t 的一条闭轨，点 $p\in\Gamma$ 是庞卡莱映射 P 的一个双曲平衡点. 若 $\mathrm{D}P(p)$ 的一切特征值的模都小于 1，则 Γ 是轨道渐近稳定的.

这个定理的证明从略，事实上还可有更强的结论，即 Γ 还是一个周期吸引子.

例 4.4.1　考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=x-y-x(x^2+y^2),\\ \dot{y}=x+y-y(x^2+y^2),\end{cases}\tag{4.4.1}$$

取 $\Sigma=\{(x,y)\mid x>0,y=0\}$，则 Σ 的法向为 $(0,1)$. 系统(4.4.1)在点 $(x,0)$ 处的切向为 $(x-x^3,x)$，它与 $(0,1)$ 不垂直，所以 Σ 是截面.

利用相坐标变换 $r=(x^2+y^2)^{1/2},\theta=\arctan(y/x)$，式(4.4.1)化为

$$\begin{cases}\dot{r}=r(1-r^2),\\ \dot{\theta}=1,\end{cases}\tag{4.4.2}$$

且 $\Sigma=\{(r,\theta)\mid r>0,\theta=0\}$. 易见 $\forall(r_0,\theta_0)$，当 $r_0\neq 0$，式(4.4.2)的解为

$$\Phi_t(r_0,\theta_0)=\left((1+(r_0^{-2}-1)e^{-2t})^{-1/2},t+\theta_0\right),$$

故从任一点 $q\in\Sigma$ 出发的轨线返回 Σ 的时间间隔都是 2π，即 $\tau(q)=2\pi$，从而庞卡莱映射由

$$(r,0)\to(P(r),0),\ r>0$$

给出，这里

$$P(r)=(1+(r^{-2}-1)e^{-4\pi})^{-1/2},r>0.$$

显然，$r_0=1$ 是 P 的不动点，它表示系统(4.4.1)的半径为 1 的圆形闭轨. 由

$$DP(1)=P'(1)=-\frac{1}{2}(1+(r^{-2}-1)e^{-4\pi})^{-2/3}(-2e^{-4\pi}/r^3)|_{r=1}=e^{-4\pi}<1,$$

易知 $r=1$ 是 P 的稳定的不动点，从而 $x^2+y^2=1$ 是系统(4.4.1)的吸引的周期轨道.

值得注意的是，我们可不求 $P(r)$ 的表达式而直接利用系统(4.4.2)在 $r=1,\theta=0$ 处的一阶近似系统来求出 $\tilde{P}'(1)$ 即 $D\tilde{P}(1)$ 的值.

系统(4.4.2)在 $r=1,\theta=0$ 处的一阶近似系统为

$$\begin{cases}\dot{\xi}=-2\xi,\\ \dot{\theta}=1.\end{cases}$$

其相应的流即

$$\Psi_t(s,\theta)=(e^{-2t}s,t+\theta_0),$$

从而原系统在 $r=1,\theta=0$ 附近可近似地表为

$$\Phi_t(r,\theta)=(1+e^{-2t}(r-1),t+\theta),$$

故由 $P(r)=\pi_1\circ\Phi_t(r,0)|_{t=2\pi}(r>0)$（其中 π_1 表示对第一分量的投影）得出

$$D\tilde{P}(1)=e^{-2(2\pi)}=e^{-4\pi}<1.$$

庞卡莱映射不仅在流的闭轨研究中有重要作用，而且是研究连续动力系统的拟周期运动和混沌运动等必不可少的工具. 一般而言，用理论方法得出庞卡莱映射的结果很困难，因为这需要用到流的具体表达式. 人们常用数值方法来求得庞卡莱映射的结果.

4.5　结构稳定性与分岔

4.5.1　结构稳定性

结构稳定性问题是动力系统理论的中心课题之一，并且对实际应用中的非线性系统的定性研究十分重要. 所谓结构稳定性或鲁棒性是指当动力系统受到小扰动后拓扑结构保持不变的性质，这里所谓拓扑结构不变是在前面所述拓扑等价或拓扑共轭意义下而言的，而系统受小扰动即系统变成邻近的一个动力系统还要通过下述的 ε－邻域概念来理解. 应注意 ε－邻域可有不同的定义，它的不同定义将使后面的 ε-尺度扰动以及相应的结构稳定性的意义也会不同.

定义 4.5.1　设集 $U\subset\mathbf{R}^n$，对于映射 $f\in C^1(U,\mathbf{R}^n)$ 和 $q>0$，f 的 ε－邻域 $B_\varepsilon(f)$ 定义为

$$\{g\in C^1(U,\mathbf{R}^n):\sup_{x\in K}(\|f(x)-g(x)\|+\|Df(x)-Dg(x)\|)<\varepsilon,\forall \text{紧集 } K\subset U\}.$$

当 $g\in B_\varepsilon(f)$，称 g 是 f 的一个 ε-尺度 C^1 扰动.

类似可定义 ε 尺度 $C^r(r>1)$ 扰动的概念. 相应的结构稳定性可称为 C^r 结构稳定性. 下面是结构稳定性或 C^1 结构稳定性的定义. 以后我们记向量场 f 生成的动力系统为 Φ_f^t.

定义 4.5.2　称映射 $f:U\to\mathbf{R}^n$ 和动力系统 Φ_f^t 是结构稳定的，若存在 $\varepsilon>0$，使得 f 的任一 ε-尺度 C^1 扰动 g 及相应的动力系统 Φ_g^t 分别与 f 和 Φ_f^t 拓扑等价；否则称它们是结构不稳定的.

由同胚 G 生成的离散动力系统 G^n 的结构稳定性类似地如下定义.

相应于局部拓扑等价,便可有局部结构稳定性的概念.于是,前面的 Hartman 定理告诉我们,动力系统在双曲型平衡点处是局部结构稳定的.

如果系统 Φ_f^t 有非双曲型平衡点 p,则此系统是结构不稳定的.因为这时 $\mathrm{D}f(p)$的某些特征值有零实部,即使很小的扰动也可能使所得系统相应于 p 的点不再是平衡点或者在相应于点 p 的平衡点处,线性化矩阵的特征值都有非零实部,从而与原系统有不同的拓扑结构.

利用流的闭轨和庞卡莱映射的关系也可知道:由闭轨得出的庞卡莱映射的不动点若是非双曲型的(这时称此闭轨为流的非双曲闭轨),则这个流是结构不稳定的.

4.5.2　分岔与中心流形方法

与结构稳定性问题密切相关的问题之一是所谓分岔问题.当某个动力系统是结构不稳定的,则任意小的适当的扰动都可使系统的拓扑结构发生突然的变化,称这种变化为分岔.含参数的动力系统还可能通过一系列的分岔导致混沌运动的产生.于是分岔问题也与混沌密切有关.

我们讨论含参数 μ 的系统的分岔问题.

设区域 $U\subset\mathbf{R}^n$,$J\subset\mathbf{R}^m$,考虑系统

$$\dot{x}=f(x,\mu)(\text{常记为 } \dot{x}=f_\mu(x)),\tag{4.5.1}$$

其中 $x\in U$ 称为状态变量,$\mu\in J$ 称为控制变量或分岔参数,对每个 $\mu\in J$,f_μ 是 U 上的 C^1 向量场.

定义 4.5.3　设当参数 μ 连续地变动时,给定的系统(4.5.1)的拓扑结构在 $\mu_0\in J$ 处发生突然变化,则称系统(4.5.1)(或向量场 $f(x,\mu)$,或相应的动力系统 $\Phi_{f_\mu}^t\equiv\Phi_\mu^t$)在 $\mu=\mu_0$ 处发生分岔,并称 μ_0 是一个分岔值(或临界值).在参数 μ 的空间中,由分岔值组成的集合称为分岔集.

为了清楚地表示分岔情况,常在(x,μ)空间中画出系统(4.5.1)的平衡点、闭轨等集合随 μ 变化的图形,称为分岔图.

考虑系统(4.5.1)的拓扑结构是否随 μ 的变化发生变化,一方面是看参数 μ 变化时,$f_\mu(x)=0$ 的解的个数,即系统平衡解的个数,是否变化,另一方面主要是看平衡点附近轨线的拓扑结构是否发生变化,这就是所谓局部分岔理论的主题.

把满足 $f(x_0,\mu_0)=0$ 的$(x_0,\mu_0)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ 称为系统(4.5.1)的分岔点,若 μ_0 是分岔值,且 x_0 邻近轨线的拓扑结构当 μ 变化而经过 μ_0 时发生变化.

根据 Hartman 定理,(x_0,μ_0)是系统(4.5.1)的分岔点的必要条件是 x_0 是 $\Phi_{\mu_0}^t$ 的非双曲型平衡点,即中心.所以分岔理论的主要任务是研究中心处局部拓扑结构随参数变化的情况.

分岔问题 $\dot{x}=f_\mu(x)$,$x\in\mathbf{R}^n$,$\mu\in\mathbf{R}^m$ 可以化成"扩充系统"问题:

$$\dot{x}=f_\mu(x),\ \dot{\mu}=0,\ (x,\mu)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m,$$

这时 $\dot{x}=f_\mu(x)$的分岔点就是这个扩充系统的中心.由于 Hartman 定理告诉我们稳定和不稳定流形都是结构稳定的,所以对 $\dot{x}=f_\mu(x)$的分岔的研究将归结为对这个扩充系统的中心流形的研究.

下面的例子表现了在动力系统研究中降低系统维数的"中心流形方法".

例 4.5.1 含参数 $\mu\in\mathbf{R}$ 的一维系统 $\dot{x}=\mu x-x^2$ 有分岔点 $(0,0)$. 它的分岔图见图 4.5.1.

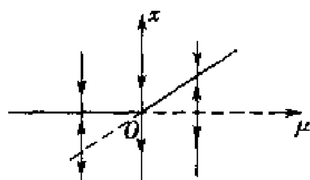


图 4.5.1

参数 μ 变化时,相应的平衡点 x_μ(0 和 μ)形成两条在原点相交的直线 $x=0$ 和 $x=\mu$. 点 (x_μ,μ) 沿直线通过原点时 x_μ 的稳定性与不稳定性发生转换,所以把这种分岔称为跨临界分岔.

一般地,若存在 $a,b\neq0$,使

$$f_\mu(x)=a\mu x-bx^2+O(\|(x,\mu)\|^3),$$

则 $\dot{x}=f_\mu(x)$ 在 $(x,\mu)=(0,0)$ 处产生跨临界分岔.

例 4.5.2 考虑二次杜芬(Duffing)方程(其中 $\delta>0,\beta\in\mathbf{R}$)

$$\begin{cases}\dot{u}=v,\\ \dot{v}=\beta u-u^2-\delta v,\end{cases}\tag{4.5.2}$$

在 $\beta=0$ 处分岔问题.

为了利用中心流形思想,把方程组(4.5.2)写成

$$\begin{cases}\dot{u}=v,\\ \dot{v}=\beta u-u^2-\delta v,\\ \dot{\beta}=0,\end{cases}\tag{4.5.3}$$

从而方程组(4.5.3)的向量场在平衡点 $(u,v,\beta)=(0,0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-\delta&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

相应于特征值 $0,-\delta,0$ 的特征向量分别为 $(1,0,0),(1,-\delta,0),(0,0,1)$,故在坐标变换

$$\begin{bmatrix}u\\v\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-\delta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\\beta\end{bmatrix},\text{即}\begin{bmatrix}x\\y\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1/\delta&0\\0&-1/\delta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\\beta\end{bmatrix}$$

下,方程组(4.5.3)化成

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\beta}{\delta}(x+y)-\dfrac{1}{\delta}(x+y)^2,\\ \dot{y}=-\delta y-\dfrac{\beta}{\delta}(x+y)+\dfrac{1}{\delta}(x+y)^2,\\ \dot{\beta}=0.\end{cases}\tag{4.5.4}$$

由于方程组(4.5.4)的中心子空间是 (x,β) 平面,故其中心流形在 (x,β,y) 空间应该有图像 $(x,\beta,h(x,\beta))$. 下面利用中心流形在 $(0,0,0)$ 与中心子空间相切, 即利用 $h(0,0)=0$, $\mathrm{D}h(0,0)=0$ 来确定 h.

由 Taylor 展开,可设

$$h(x,\beta)=ax^2+bx\beta+c\beta^2+O(3)\quad(O(k)\text{表示 }O(\|(x,\beta)\|^k)),$$

注意到

$$\mathrm{D}h(x,\beta)=\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,\beta),\frac{\partial h}{\partial\beta}(x,\beta)\right)=(2ax+b\beta+\cdots,bx+2c\beta+\cdots),$$

故从 $y=h(x,\beta)$ 关于 t 求导得出

$$(2ax+b\beta+\cdots)\left(\frac{\beta}{\delta}(x+h)-\frac{1}{\delta}(x+h)^2\right)=-\delta h-\frac{\beta}{\delta}(x+h)+\frac{1}{\delta}(x+h)^2,$$

即

$$(2ax+b\beta)\left(\frac{\beta}{\delta}(x+O(2))+\delta(ax^2+b\beta x+c\beta^2+O(3))\right)$$
$$+\frac{\beta}{\delta}(x+ax^2+b\beta x+c\beta^2+O(3))-\frac{1}{\delta}(x+O(2))^2+O(3))\equiv 0,$$

从而

$$a\delta x^2+b\delta\beta x+c\delta\beta^2+\frac{1}{\delta}\beta x-\frac{1}{\delta}x^2\equiv O(3),$$

得出

$$a=\frac{1}{\delta^2},b=-\frac{1}{\delta^2},c=0,$$

故

$$h(x,\beta)=\frac{1}{\delta^2}x^2-\frac{1}{\delta^2}\beta x+O(3).$$

因此系统限制在中心流形上后再投影于(x,β)平面可得

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\beta}{\delta}\left(x+\dfrac{1}{\delta^2}(x^2-\beta x)\right)-\dfrac{1}{\delta}(x+\cdots)^2+O(3),\\ \dot{\beta}=0,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{1}{\delta}\beta x-\dfrac{1}{\delta}x^2+O(3),\\ \dot{\beta}=0.\end{cases}\tag{4.5.5}$$

而式(4.5.3)在分岔点$(u,v,\beta)=(0,0,0)$邻近的分岔状况，也就是式(4.5.5)中第一个方程在$(x,\beta)=(0,0)$处的分岔状况．按照例 4.5.1 可得出类似的跨临界分岔图，于是系统(4.5.4)在原点处中心流形内分岔情况如图 4.5.2 所示．

4.5.3　几种重要的分岔

除了上面的典型例子，下面再介绍几种简单而重要的分岔．

(1)设(x_0,μ_0)是系统 $\dot{x}=f_\mu(x),x\in\mathbf{R}^n,\mu\in\mathbf{R}$ 的分岔点，且 $\mathrm{D}f_{\mu_0}(x_0)$除一个特征值为零外，其余特征值都有负实部．利用中心流形的思想，系统的分岔只发生在 $\dot{x}=f_\mu(x),\dot{\mu}=0$ 的中心流形里面，它是一个二维流形(曲面)．利用中心流形定理，可把原系统分岔问题简化为一维系统的分岔问题．故我们考虑

$$\dot{x}=f_\mu(x),x\in\mathbf{R},\mu\in\mathbf{R}\tag{4.5.6}$$

在$(x,\mu)=(0,0)$处的分岔．

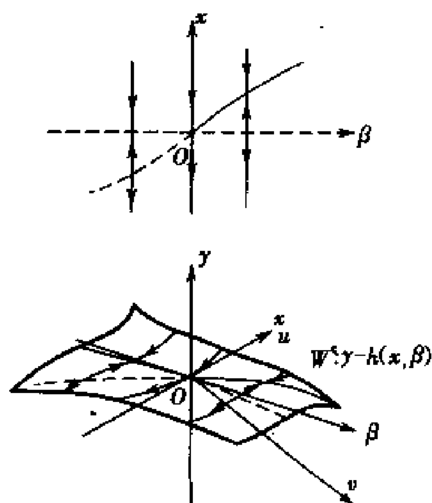


图 4.5.2

当 $f_\mu(x)=\mu-x^2$，则其分岔图如图 4.5.3．

当 $\mu<0$ 时，系统没有平衡点；当 $\mu=0$ 时，系统只有一个平衡点 $\bar{x}=0$；当 $\mu>0$ 时系统有两个平衡点 $\bar{x}=\pm\sqrt{\mu}$，反映了原系统的一个鞍点和一个结点．因此这种分岔叫做鞍结分岔．

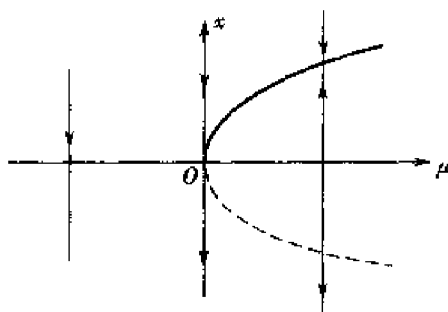


图 4.5.3

可以证明：若存在 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$ab\neq0$，使得

$$f_\mu(x)=a\mu-bx^2+O(\|(x,\mu)\|^3),$$

则系统(4.5.6)在 $(x,\mu)=(0,0)$ 处出现鞍结分岔，即当 $ab\mu<0$ 时无平衡点，$ab\mu>0$ 时有一个鞍点和一个结点，且平衡点 $(\bar{x},\mu)$ 形成与 x 轴在原点相切的曲线．因此这种分岔也称为切分岔．

当 $f_\mu(x)=\mu x-x^3$ 或 $f_\mu(x)=\mu x+x^3$，则系统在 $(x,\mu)=(0,0)$ 分别产生所谓超临界 pitchfork 分岔或亚临界 pitchfork 分岔．分岔图分别如下面的图 4.5.4 和图 4.5.5 所示．

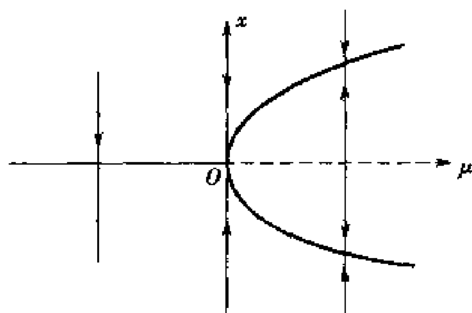


图 4.5.4

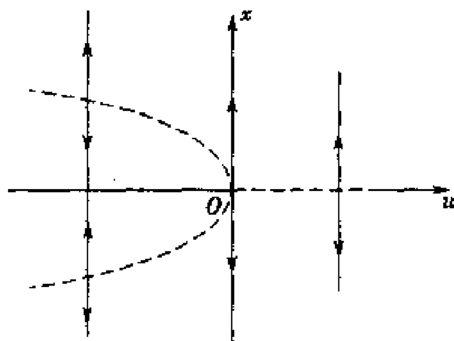


图 4.5.5

(2) 设 (x_0,μ_0) 是系统

$$\dot{x}=f_\mu(x),x\in\mathbf{R}^n,\mu\in\mathbf{R},$$

的分岔点，且 $Df_\mu(x_0)$ 除一对共轭虚数特征值外，其余特征值都有非零实部，则根据中心流形定理和系统的分岔发生于"扩张系统" $\dot{x}=f_\mu(x)$，$\dot{\mu}=0$ 的在 (x_0,μ_0) 处的中心流形里面，它是一个三维的流形，从而不妨考虑下面这类系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha\mu x-\omega y+f_\mu(x,y),\\ \dot{y}=\omega x+\alpha\mu y+g_\mu(x,y),(x,y)\in\mathbf{R}^2,\mu\in\mathbf{R},\end{cases}\tag{4.5.7}$$

其中 α,ω 是非零常数，f_μ,g_μ 是满足 $f_\mu(0,0)=g_\mu(0,0)=0$ 和 $Df_\mu(0,0)=Dg_\mu(0,0)=0$ 的 C^1 函数．

方程(4.5.7)的一个最典型的例子是

$$\begin{cases}\dot{x}=\mu x-y-x(x^2+y^2),\\ \dot{y}=x+\mu y-y(x^2+y^2),(x,y)\in\mathbf{R}^2,\mu\in\mathbf{R},\end{cases}\tag{4.5.8}$$

此系统的分岔点是 $(x,y,\mu)=(0,0,0)$，且在 $(x,y)=(0,0)$ 处向量场的 Jacobi 矩阵为 $\begin{pmatrix}\mu & -1\\ 1 & \mu\end{pmatrix}$，它有两个特征值：$\mu\pm\mathrm{i}$．对任意 $\mu\in\mathbf{R}$，$(x,y)=(0,0)$ 是系统(4.5.8)的仅有的平衡点，因此分岔图中 μ 轴是平衡点集．进一步可知，当 $\mu<0$ 时，平衡点是稳定的焦点；当 $\mu>0$

时，平衡点是不稳定的焦点. 同时系统有一个周期轨道，它是半径为$\sqrt{\mu}$的圆 $x^2+y^2=\mu$；所有这种周期轨道组成一个旋转抛物面，在原点与 xOy 平面相切，这种当参数经过某临界值时系统的平衡点个数没有变化而在平衡点处分岔出周期轨道的性态称为 Hopf 分岔.

当上述旋转抛物面开口与 μ 轴正向一致时，称此 Hopf 分岔是超临界的(图 4.5.6). 如果(4.5.8)中的每个方程的末项改变符号(或者把(4.5.8)中 μ 都换成 $-\mu$)，就可得到所谓亚临界的 Hopf 分岔，旋转抛物面开口将与 μ 轴负向一致(图 4.5.7).

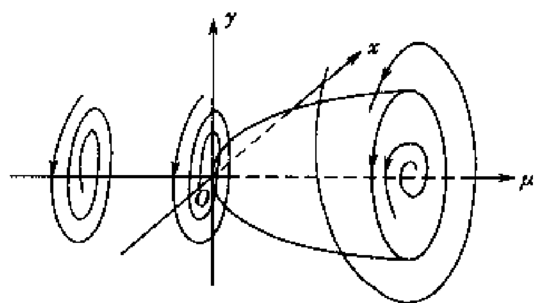


图 4.5.6

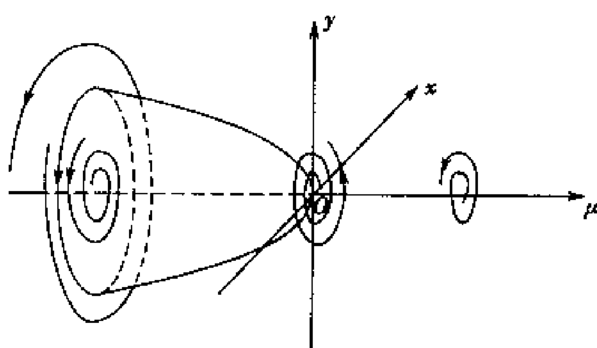


图 4.5.7

对于较一般的系统(4.5.7)的 Hopf 分岔的讨论需要用到正规形式和李群等知识，可参见[22]等文献. 在此从略.

Hopf 分岔只是对一对纯虚数特征值而言，若系统的向量场有多对纯虚数特征值，则从平衡点分岔出来的就可能不再是周期轨道，而是复杂的拟周期轨道，从而在分岔图中可能会出现高维的环面. 这实际上是关于湍流发生机制的研究方面 Landau-Hopf 道路的出发点.

在 Ruelle-Takens 著名的文章[43]中，依赖于对 Navier-Stokes 方程运用中心流形和 Hopf 分岔的思想，提出了混沌吸引子(奇怪吸引子)的概念.

4.6 Liapunov-Schmidt 约化方法

除了上节介绍的中心流形方法，还可以用下面要介绍的方法来降低所研究的非线性动力系统的维数. Liapunov-Schmidt 约化方法(以下简称 LS 方法)是将高维或无限维非线性方程化简为低维方程的一种降维方法. 其基本思想是通过空间分解，把一个高维空间(含无限维空间)中的非线性方程分别投影到两个子空间上而化为与之等价的两个方程，其中一个通常是有限维空间中的非线性方程，另一个满足隐函数定理的条件，从而有唯一解，把这个唯一解代入第一个方程，就得到一个低维(有限维)的方程，且该方程保持原方程的分岔行为不变.

4.6.1 Liapunov-Schmidt 约化的基本步骤

设 X,Y 为 Banach 空间，考虑由 $C^r(r\geqslant 1)$映射 $F:X\times\mathbf{R}^m\to Y$ 给出的方程

$$F(u,\mu)=0,\ u\in X,\ \mu\in\mathbf{R}^m,\tag{4.6.1}$$

其中 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)$是参数. 设 $F(0,0)=0$，$A=D_uF(0,0)\in\mathscr{B}(X,Y)$，其零空间为 $\mathscr{N}(A)$，值域为 $\mathscr{R}(A)$. 又设 $\mathscr{N}(A)$的维数有限且大于零，即零是有界线性算子 A 的有限重特征值.

在许多实际问题中 $\mathcal{N}(A)\subset X$ 和 $\mathcal{R}(A)\subset Y$ 均存在闭的补子空间，即有闭子空间 $X_0\subset X$ 和 $Y_0\subset Y$，使得

$$X=\mathcal{N}(A)\oplus X_0,\ Y=Y_0\oplus\mathcal{R}(A). \tag{4.6.2}$$

特别，当非线性算子 F 的 F－偏导算子 A 为 Fredholm 算子时，上述论断是成立的.

注 有界线性算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 称为 Fredholm 的，是指它的零空间的维数 $\dim\mathcal{N}(A)$ 和值域的余维数 $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A)=\dim(Y/\mathcal{R}(A))$ 均是有限的，此时

$$i(A)\equiv\dim\mathcal{N}(A)-\operatorname{codim}\mathcal{R}(A)$$

称为 A 的指标.

定义投影算子

$$P:Y\to\mathcal{R}(A) \tag{4.6.3a}$$

和补投影算子

$$I-P:Y\to Y_0, \tag{4.6.3b}$$

其中 I 为恒等算子. 对于 $u\in X$，设 $u=v+w$，其中 $v\in\mathcal{N}(A)$，$w\in X_0$，方程(4.6.1)等价于下列方程组

$$PF(v,w,\mu)=0, \tag{4.6.4a}$$

$$(I-P)F(v+w,\mu)=0, \tag{4.6.4b}$$

记 $\Phi(v,w,\mu)=PF(v+w,\mu)$，则 $\Phi:\mathcal{N}(A)\times X_0\times\mathbf{R}^m\to\mathcal{R}(A)$. 由 $F(0,0)=0$ 知，$\Phi(0,0,0)=0$，另外还有

$$D_w\Phi(0,0,0)=PD_uF(v+w,\mu)|_{(0,0,0)}=PD_uF(0,0)=PA=A,$$

显然 A 限制在 X_0 上时，它是可逆的，从而导算子 $D_w\Phi(0,0,0)$ 可逆. 由隐函数定理，方程(4.6.4a)在 $(v,w,\mu)=(0,0,0)$ 的某个邻域内存在唯一解 $w=W(v,\mu)$，并有 $W(0,0)=0$，将这个解代入(4.6.4b)，可得方程

$$\Psi(v,\mu)\equiv(I-P)F(v+W(v,\mu),\mu)=0. \tag{4.6.5}$$

其中映射 $\Psi:\mathcal{N}(A)\times\mathbf{R}^m\to Y_0$. 由于在 $(v,\mu)=(0,0)$ 附近，方程(4.6.1)的解和方程(4.6.5)的解之间有一一对应关系：

$$u=v+W(v,\mu) \tag{4.6.6}$$

故这两个方程的求解问题是等价的. 我们把方程(4.6.5)称为方程(4.6.1)的分岔方程.

把(0,0)附近方程(4.6.1)的求解问题转化为低维方程(4.6.5)在(0,0)附近的求解问题的上述降维方法称为 Liapunov-Schmidt 约化方法，简称 LS 方法.

在应用中，为了讨论方程(4.6.5)，适当的选取 Y_0 并在 $\mathcal{N}(A)$ 及 Y_0 中适当选取坐标是很重要的. 下面设 Y 为 Hilbert 空间，并取 Y_0 为 $\mathcal{R}(A)$ 的正交补，即

$$Y_0=\mathcal{R}(A)^\perp=\{y\in Y:\langle y,z\rangle=0,\ \forall z\in\mathcal{R}(A)\}.$$

此外还设

$$\dim\mathcal{N}(A)=\dim\mathcal{R}(A)^\perp=n.$$

例如，A 是具有零指标的 Fredholm 算子时上式就成立，此时若设

$$\mathcal{N}(A)=\operatorname{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_n\},\quad \mathcal{R}(A)^\perp=\operatorname{span}\{u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*\},$$

则 $\forall u\in\mathcal{N}(A)$，有

$$u=\sum_{j=1}^{n}x_ju_j,x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n.$$

将其代入分岔方程,并分别与 u_i^* $(i=1,2,\cdots,n)$取内积，便得到关于变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个方程：

$$g_i(x,\mu)\equiv<u_i^*,F\Big(\sum_{j=1}^{n}x_ju_j+W\Big(\sum_{j=1}^{n}x_ju_j,\mu\Big),\mu\Big)>=0,i=1,\cdots,n. \tag{4.6.7}$$

在上式的推导中,用到了对任何 $y\in Y$ 皆有 $Py\in\mathscr{R}(A)$从而$\langle u_i^*,Py\rangle=0$ 的结果.显然方程组(4.6.7)与方程(4.6.5)等价,故方程组(4.6.7)也被称为原方程(4.6.1)的分岔方程.

应当指出,虽然由 LS 方法得到的分岔方程的维数较低,但有时实际上很难求出 g 的显式表达式.因此,通过分岔分析去了解分岔方程解的定性性质是主要的研究途径.下面一章将要讲述的奇异性理论就是一种常用的静态分岔分析方法.

4.6.2　分岔方程导数的计算

利用下一章将介绍的奇异性理论来讨论分岔问题(4.6.7)的分岔行为时,需要计算分岔问题函数 g_i 的一些导数,但这里无需知道 g_i 的显式表达式,就可利用原映射 F 的导数进行计算.具体的结果如下.

引入 F 在(u,μ)处的 k 阶微分$(k\geqslant1)$:

$$\mathrm{D}^kF(u,\mu)(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_k)=\frac{\partial}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial}{\partial t_k}F\Big(u+\sum_{i=1}^{k}t_i\zeta_i,\mu\Big)\Big|_{t_1=t_2=\cdots=t_k=0}, \tag{4.6.8}$$

它是关于 k 个变量$\zeta_1,\zeta_2,\cdots\zeta_k\in X$ 的对称k 线性函数,再记 $F_{\mu_i}=\dfrac{\partial F}{\partial\mu_i}$.

下面给出 g_i 的一些导数公式,其中 g_i 的导数都是在$(x,\mu)=(0,0)$处取的,F 的导数都是在$(u,\mu)=(0,0)$处取的.

(1)$\partial g_i/\partial x_j=0$;

(2)$\partial^2g_i/\partial x_j\partial x_k=\langle u_i^*,\mathrm{D}^2F(u_j,u_k)\rangle$;

(3)$\partial^3g_i/\partial x_j\partial x_k\partial x_l=\langle u_i^*,V\rangle$;

其中

$$V=\mathrm{D}^3F(u_j,u_k,u_l)-\mathrm{D}^2F(u_j,A^{-1}P\mathrm{D}^2F(u_l,u_k))$$
$$-\mathrm{D}^2F(u_k,A^{-1}P\mathrm{D}^2F(u_l,u_j))-\mathrm{D}^2F(u_l,A^{-1}P\mathrm{D}^2F(u_k,u_j)),$$

$A^{-1}:\mathscr{R}(A)\to X_0$ 是 $A|_{X_0}$的逆算子;

(4)$\partial g_i/\partial\mu_j=\langle\mu_i^*,F_{\mu_j}\rangle$;

(5)$\partial^2g_i/\partial x_j\partial\mu_k=\langle u_i^*,\mathrm{D}F_{\mu_k}\cdot u_j-\mathrm{D}^2F(u_j,A^{-1}PF_{\mu_k})\rangle$.

上述公式均可由隐函数微分法导出(参见[20]),根据需要还可推得更多的公式.

在 $\dim\mathcal{N}(A)=\operatorname{codim}\mathscr{R}(A)=1$ 的情形,上述公式成为如下较简单的形式:

(1)$g_x=0$;

(2)$g_{xx}=<u_1^*,\mathrm{D}^2F(u_1,u_1)>$;

(3)$g_{xxx}=<u_1^*,\mathrm{D}^3F(u_1,u_1,u_1)-3\mathrm{D}^2F(u_1,A^{-1}P\mathrm{D}^2F(u_1,u_1))>$;

(4) $g_{\mu_i} = \langle u_1^*, F_{u_i} \rangle$;

(5) $g_{\mu_i x} = \langle u_1^*, DF_{\mu_i} \cdot u_1 - D^2F(u_1, A^{-1}PF_{\mu_i}) \rangle$.

在计算上述导数时,主要的困难是求逆算子 A^{-1}. 但有下面两种情形可以避免或减轻这个困难:

其一,当 F 是 u 的奇函数时,这时,在 $(u,\mu)=(0,\mu)$ 处有 $F_{\mu_i}=0, D^2F=0$,从而式(2)(4)给出

$$\partial^2 g_i / \partial x_k \partial x_l = 0, \partial g_i / \partial \mu_j = 0,$$

式(3)和(5)分别给出

$$\partial^3 g_i / \partial x_j \partial x_k \partial x_l = \langle u_i^*, D^3F(u_j, u_k, u_l) \rangle,$$

$$\partial^2 g_i / \partial x_j \partial \mu_k = \langle u_i^*, (DF_{\mu_k}) \cdot u_j \rangle.$$

其二,当对一切 μ 有 $F(0,\mu)=0$ 时,这时,在 $(u,\mu)=(0,\mu)$ 处有 $F_{\mu_i}=0$,因此式(4)和(5)分别给出

$$\partial g_i / \partial \mu_j = 0,$$

$$\partial^2 g_i / \partial x_j \partial \mu_k = \langle u_i^*, (DF_{\mu_k}) \cdot u_j \rangle.$$

第 5 章　奇异性理论及应用

在动力系统的分岔问题中经常会遇到平衡态多重解和周期解的 Hopf 分岔等现象，奇异性理论方法为研究这类问题提供了有力的工具. 本章着重介绍单变量分岔的奇异性理论及其应用，从中可对奇异性理论方法的特点获得总体的了解.

5.1　奇异性及识别问题

5.1.1　静态分岔的概念

考虑静态方程

$$g(x,\lambda)=0,\quad x\in U\subset X,\quad \lambda\in J\subset \mathbf{R}^m, \tag{5.1.1}$$

其中映射 $g:U\times J\to Y$, X,Y 是 Banach 空间，λ 是参数. 设 $(x_0,\lambda_0)\in U\times J$ 是方程(5.1.1)的解，即 $g(x_0,\lambda_0)=0$. 在局部分岔问题中，我们关心的是在 (x_0,λ_0) 附近，方程(5.1.1)的解的数目和稳定性随参数 λ 变化的情况. 以下简称(5.1.1)为"分岔问题 $g(x,\lambda)$" 或"分岔问题 g"等等.

取 (x_0,λ_0) 的某个足够小的邻域 $\Omega\subset U\times J$. 记 $n(\lambda)$ 为当 λ 固定时(5.1.1)在 Ω 内的解的数目. 如果当 λ 变化经过 λ_0 时，$n(\lambda)$ 发生突然变化，则称 g 在 (x_0,λ_0) 处出现静态分岔，(x_0,λ_0) 为 $g(x,\lambda)$ 的静态分岔点，λ_0 为 $g(x,\lambda)$ 的静态分岔值. 概括地说，静态分岔研究方程(5.1.1)的多重解问题.

定理 5.1.1(静态分岔的必要条件)　设 (x_0,λ_0) 满足 $g(x_0,\lambda_0)=0$，且为 $g(x,\lambda)$ 的静态分岔点，导算子 $L=\mathrm{D}_x g(x_0,\lambda_0)$ 是零指标的 Fredholm 算子，则 L 的零空间 $\mathcal{N}(L)$ 的维数大于 0，即 L 有零特征值.

证明　用反证法. 若不然，则 $\dim\mathcal{N}(L)=0$. 由 Fredholm 算子的性质，算子 L 是可逆的. 由隐函数定理知，在 λ_0 的某邻域内存在唯一的映射 $x=x(\lambda)$，使得 $x(\lambda_0)=x_0$ 且 $g(x(\lambda),\lambda)=0$. 这表明方程(5.1.1)的解的数目在 λ_0 附近保持不变，与 (x_0,λ_0) 是 $g(x,\lambda)$ 的静态分岔点的假设矛盾. 证毕.

定理 5.1.1 给出的只是静态分岔的必要条件，它并不充分. 如方程

$$g(x,\lambda)\equiv x^3-\lambda=0, x\in\mathbf{R}, \lambda\in\mathbf{R},$$

显然有

$$g(0,0)=0, \mathrm{D}_x g(0,0)=3x^2|_{(0,0)}=0,$$

但对任一实数 $\lambda\in\mathbf{R}$，方程都存在唯一实数解

$$x=\lambda^{\frac{1}{3}},$$

因此(0,0)不是 g 的静态分岔点.

如果在点 (x_0,λ_0) 处有 $g(x_0,\lambda_0)=0$，且 $\mathrm{D}_x g(x_0,\lambda_0)$ 的零空间的维数大于 0，则称

(x_0,λ_0)为 g 的一个奇异点. 定理 5.1.1 表明,若(x_0,λ_0)是 g 的静态分岔点,则它必为 g 的奇异点,反之不然.

在静态分岔研究中,我们首先求出 $g(x,\lambda)$的奇异点,在该点处可能出现静态分岔,然后再分析 $g(x,\lambda)$在奇异点附近的形态以判断在该奇异点处是否确实出现静态分岔,并进一步研究分岔的性质和类型.

奇异性理论是研究可微映射在奇异点附近的性态及其分类的数学理论,主要包括三方面的内容:识别问题、开折问题和分类问题.

5.1.2 限制切空间

奇异性理论研究映射的局部性质,即有关结论仅在奇点的某个小邻域上成立."芽"的概念刻画映射的局部性质,是奇异性理论的主要研究对象.

不失一般性,总取奇异点为原点. 否则可通过坐标变换去实现.

定义 5.1.1 设$(0,0)\in U_i\times V_i\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}, i=1,2, g_i:U_i\times V_i\to\mathbf{R}$是两个 C^∞ 函数. 如果存在原点的某个邻域 $U\times V\subset U_i\times V_i$,使得 $g_1(x,\lambda)|_{U\times V}=g_2(x,\lambda)|_{U\times V}$,则把 $g_1(x,\lambda)$和 $g_2(x,\lambda)$视为等同. 显然上述等同是一等价关系,在此等价关系下的每一等价类称为一个芽. 所有这样的芽组成的线性空间称为芽空间,记为 $\varepsilon_{x,\lambda}$.

$\varepsilon_{x,\lambda}$在通常的加法和乘法下构成一个交换环(参见 1.4).

对任意个自变量的函数或映射,均可类似地建立芽和芽空间的概念.

为简便计,下面的讨论仅对单变量静态分岔问题进行. 我们首先给出强等价的概念,并由此引入限制切空间,然后介绍与限制切空间等有关的计算,最后讨论等价的判定问题.

定义 5.1.2 称分岔问题 $g,h\in\varepsilon_{x,\lambda}$是强等价的,记作 $g\overset{s}{\sim}h$,若存在 $X,S\in\varepsilon_{x,\lambda}$,使得

$$h(x,\lambda)=S(x,\lambda)g(X(x,\lambda),\lambda) \tag{5.1.2}$$

其中 $S(0,0)>0, X(0,0)=0$ 和 $X_x(0,0)>0$.

由式(5.1.2)可知,当 $g\overset{s}{\sim}h$ 时,在原点的足够小的邻域内有 $S\neq0$,故芽函数 $g(x,\lambda)$和 $h(x,\lambda)$之间可通过局部微分同胚$(X(x,\lambda),\lambda)$相互变换,于是 g 与 h 在原点附近有相同的分岔特征. 具体地说,当 $g\overset{s}{\sim}h$ 时,有下列结果(见图 5.1.1.):

(1)若$(0,0)$是 g 的一个奇异点,则$(0,0)$也是 h 的一个奇异点;

(2)方程 $g(x,\lambda)=0$ 和 $h(x,\lambda)=0$ 在$(0,0)$附近解的数目有对应关系 $n_g(\lambda)=n_h(\lambda)$;

(3)方程 $\dot{x}+g(x,\lambda)=0$ 和 $\dot{x}+h(x,\lambda)=0$ 对应的轨线有相同的时间定向(由 $X_x>0$, $S>0$ 保证),因此对应的平衡解有相同的稳定性.

设 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$,奇异性理论的基本问题之一就是:当 $p\in\varepsilon_{x,\lambda}$满足怎样的条件时,才能对一切绝对值充分小的实数 t(称为小量 t)有

$$g\overset{s}{\sim}g+tp,$$

这里 p 或 tp 可称为对 g 的一个摄动. 我们首先设摄动 $p\in\varepsilon_{x,\lambda}$满足上述要求,即对于所有小量 t,存在函数 $S(x,\lambda,t)$及 $X(x,\lambda,t)$使得

$$g(x,\lambda)+tp(x,\lambda)=S(x,\lambda,t)g(X(x,\lambda,t),\lambda), \tag{5.1.3}$$

这里

$$X(0,0,t)=0. \tag{5.1.4}$$

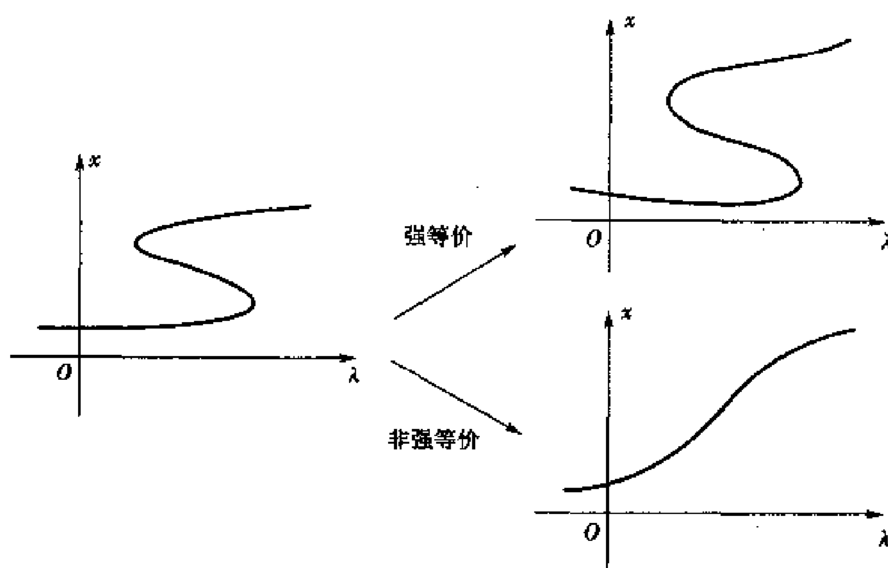


图 5.1.1

进一步假定 X 和 S 是 x,λ,t 的光滑函数，且在 $t=0$ 处还有

$$S(x,\lambda,0)\equiv 1,X(x,\lambda,0)\equiv x. \tag{5.1.5}$$

在式(5.1.3)中，关于 t 在 $t=0$ 处求导，并利用式(5.1.5)可得

$$p(x,\lambda)=\dot{S}(x,\lambda,0)g(x,\lambda)+g_x(x,\lambda)\dot{X}(x,\lambda,0),$$

注意 $\dot{X}(0,0,0)=0$.

限制切空间是上面所构造函数的全体，即有下述结论.

定义 5.1.3　芽 g 的限制切空间是全体具有下列形式：

$$p(x,\lambda)=a(x,\lambda)g(x,\lambda)+b(x,\lambda)g_x(x,\lambda)$$

的芽 p 组成的集，记为 $RT(g)$. 这里 $a,b\in\varepsilon_{x,\lambda}$，且 $b(0,0)=0$.

由上面推导不难看出，$p\in RT(g)$是 $g+tp$(t 为小量)强等价于 g 的必要条件，但不是充分条件. 不过我们能够证明下述定理.

定理 5.1.2　设芽 $g,p\in\varepsilon_{x,\lambda}$. 如果

$$RT(g+tp)=RT(g),\forall t\in[0,1], \tag{5.1.6}$$

则

$$g+tp\overset{s}{\sim}g,\forall t\in[0,1].$$

不难知道，式(5.1.6)成立时，必有 $p\in RT(g)$，请读者自行验证.

5.1.3　限制切空间的特征化

记 ε_n 为 n 个实变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 C^∞ 函数芽的全体组成的芽空间.

引理 5.1.1　设芽 $f\in\varepsilon_n$ 且 $f(0)=0$，则存在光滑芽 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\varepsilon_n$，使得

$$f(x)=x_1a_1(x)+\cdots+x_na_n(x), \tag{5.1.7}$$

这里 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$.

证明　设 f 定义在球 $B_\varepsilon(0)\subset\mathbf{R}^n$ 上. 任意给定 $x\in B_\varepsilon(0)$，令

$$h(s)\equiv f(sx),s\in[0,1],$$

利用

$$h(0)=f(0)=0,$$

得

$$f(x)=h(1)-h(0)=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}(s)\mathrm{d}s.$$

利用复合函数求导的链式法则得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}(s)=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(sx),$$

记

$$a_i(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(sx)\mathrm{d}s,$$

显然 $a_i\in\varepsilon_n$，$i=1,2,\cdots,n$，且 f 具有表达式(5.1.7). 证毕.

引理 5.1.2 设芽 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$，芽 $f\in RT(g)$的充分必要条件是存在 $a,b,c\in\varepsilon_{x,\lambda}$使得

$$f=ag+(xb+\lambda c)g_x. \tag{5.1.8}$$

证明 充分性是显然的，下面证明必要性.

设 $f\in RT(g)$，于是存在 $a,b\in\varepsilon_{x,\lambda}$，$b(0,0)=0$，使得

$$f(x,\lambda)=a(x,\lambda)g(x,\lambda)+b(x,\lambda)g_x(x,\lambda),$$

再由 $b(0,0)=0$ 及引理 5.1.1 知，存在 $\bar{b}(x,\lambda),\bar{c}(x,\lambda)\in\varepsilon_{x,\lambda}$，使得

$$b(x,\lambda)=x\bar{b}(x,\lambda)+\lambda\bar{c}(x,\lambda),$$

从而有

$$f(x,\lambda)=a(x,\lambda)g(x,\lambda)+(x\bar{b}(x,\lambda)+\lambda\bar{c}(x,\lambda))g_x(x,\lambda),$$

即式(5.1.8)成立. 证毕.

设 $f\in\varepsilon_n$，我们用 $j^kf(x)$表示 f 在原点的 k 阶 Taylor 多项式，即

$$j^kf(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}f|_{x=0}x^{\alpha},$$

这里 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是非负整数的多重指标，且

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\quad \alpha!=(\alpha_1)!\cdots(\alpha_n)!,$$

$$x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

引理 5.1.3 设 $f\in\varepsilon_n$，则对任何非负整数 k，存在系数 $a_\alpha\in\varepsilon_{x,\lambda}$，$\alpha$ 是多重指标且 $|\alpha|=k+1$，使得

$$f(x)=j^kf(x)+\sum_{|\alpha|=k+1}a_\alpha(x)x^{\alpha}.$$

证明 利用数学归纳法及引理 5.1.1 易证，从略.

对于给定的 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$，由引理 5.1.2 不难证明：$RT(g)$是芽空间 $\varepsilon_{x,\lambda}$中的一个理想. 事实上，$\forall f_1,f_2\in RT(g)$，由引理 5.1.2 知，存在 $a_i,b_i,c_i\in\varepsilon_{x,\lambda}$，$i=1,2$，使得

$$f_1=a_1g+b_1xg_x+c_1\lambda g_x,\quad f_2=a_2g+b_2xg_x+c_2\lambda g_x,$$

从而有

$$f_1-f_2=(a_1-a_2)g+(b_1-b_2)xg_x+(c_1-c_2)\lambda g_x\in RT(g),$$

即 $RT(g)$关于加法运算是 $\varepsilon_{x,\lambda}$的子群.

再者，$\forall f\in RT(g)$，有

$$f=ag+bxg_x+c\lambda g_x,\ a,b,c\in\varepsilon_{x,\lambda}.$$

$\forall \psi\in\varepsilon_{x,\lambda}$，显然有

$$\psi f=(\psi a)g+(\psi b)xg_x+(\psi c)\lambda g_x\in RT(g),$$

故 $RT(g)$关于函数的加法和乘法运算构成 $\varepsilon_{x,\lambda}$的一个理想.

设 $p_1,\cdots,p_k\in\varepsilon_n$，不难验证：形如

$$a_1p_1+a_2p_2+\cdots a_kp_k,\ a_i\in\varepsilon_n,\ i=1,2,\cdots,k$$

的线性组合的全体构成 ε_n 的一个理想，用记号$<p_1,p_2,\cdots,p_k>$表示，且称 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是这个理想的生成子，于是我们有

$$RT(g)=<g,xg_x,\lambda g_x>. \tag{5.1.9}$$

一个由有限个芽生成的理想，我们说它是有限生成的，如$<p_1,p_2,\cdots,p_k>$. 不难举例说明，ε_n 中确实存在不是有限生成的理想，但我们在本书中考虑的均是有限生成理想.

例 5.1.1　证明

$$RT(x^2+\lambda)=\{f\in\varepsilon_{x,\lambda}\mid f(0,0)=f_x(0,0)=0\}. \tag{5.1.10}$$

证明　由式(5.1.9)得

$$RT(x^2+\lambda)=<x^2+\lambda,2x^2,2x\lambda>. \tag{5.1.11}$$

我们首先证明

$$RT(x^2+\lambda)=<x^2,\lambda>. \tag{5.1.12}$$

记 $S=<x^2,\lambda>$，$g=x^2+\lambda$，对任一 $h\in RT(g)$，有

$$h=a(x^2+\lambda)+b(2x^2)+c(2\lambda x),\ a,b,c\in\varepsilon_{x,\lambda},$$

即

$$h=(a+2b)x^2+(a+2xc)\lambda\in S,$$

从而 $RT(g)\subset S$.

反过来，对任一 $h\in S$，存在 $\alpha,\beta\in\varepsilon_{x,\lambda}$，使得

$$h=\alpha x^2+\beta\lambda.$$

令

$$a=\beta,b=(\alpha-\beta)/2,c=0,$$

则显然有

$$\alpha x^2+\beta\lambda=(a+2b)x^2+(a+2cx)\lambda\in RT(g),\ a,b,c\in\varepsilon_{x,\lambda},$$

即式(5.1.12)，得证.

下面证明式(5.1.10).

记

$$G=\{f\in\varepsilon_{x,\lambda}\mid f(0,0)=f_x(0,0)=0\}.$$

设 $f\in RT(g)$，由式(5.1.12)知，存在 $\alpha,\beta\in\varepsilon_{x,\lambda}$，使得

$$f(x,\lambda)=\alpha(x,\lambda)x^2+\beta(x,\lambda)\lambda,$$

于是有

$$f(0,0)=f_x(0,0)=0,$$

即 $f\in G$,亦即 $RT(g)\subset G$. 反过来,设 $f\in G$,即 $f(0,0)=f_x(0,0)=0$,应用 Taylor 公式($k=1$)知,存在 $a_{20},a_{11},a_{02}\in\varepsilon_{x,\lambda}$,使得

$$f(x,\lambda)=f_\lambda(0,0)\lambda+a_{20}x^2+a_{11}\lambda x+a_{02}\lambda^2,$$

于是

$$f(x,\lambda)=a_{20}x^2+(f_\lambda(0,0)+a_{11}x+a_{02}\lambda)\lambda\in S=RT(g).$$

至此式(5.1.10)获证. 证毕.

注 由例 5.1.1 我们知道,在特征化一个芽的限制切空间时,下列三个步骤具有普遍意义:

(1)去掉多余的生成子. 如式(5.1.11)中生成子 $2\lambda x$ 可由另外两个生成子表示

$$2\lambda x=2x(x^2+\lambda)-x(2x^2),$$

于是在求上述三个生成子生成的理想时,可以去掉这个生成子.

(2)简化生成子. 例如,在由式(5.1.11)得到式(5.1.12)时,利用了

$$x^2=\frac{1}{2}(2x^2),\ \lambda=(x^2+\lambda)-\frac{1}{2}(2x^2).$$

(3)由 $RT(g)$的生成子特征化 $RT(g)$. 这里,特征化 $RT(g)$就是寻求芽 $f\in RT(g)$的充要条件,这些条件通常利用 $f(0)$及 f 在 0 处的有限阶导数来刻画.

下面两个引理在求限制切空间 $RT(g)$时有着基本作用.

引理 5.1.4 设 $S=<p_1,p_2,\cdots,p_k>$,若 $p_k=a_1p_1+\cdots+a_{k-1}p_{k-1}$,其中 $a_i\in\varepsilon_n$,$i=1,2,\cdots,k-1$,则 $S=<p_1,p_2,\cdots,p_{k-1}>$.

证明是简单的,建议读者自行完成.

引理 5.1.5 设 $S=<p_1,p_2,\cdots,p_k>$是 ε_n 中的理想,对于 $i=1,2,\cdots,k$,若

$$q_i=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}p_j, \tag{5.1.13}$$

其中 $a_{ij}\in\varepsilon_n$,且矩阵$(a_{ij}(0))_{k\times k}$是可逆的,则

$$S=<q_1,q_2,\cdots,q_k>.$$

证明 我们需要证明$<p_1,p_2,\cdots,p_k>=<q_1,q_2,\cdots,q_k>$.

由式(5.1.13)易见,$<p_1,p_2,\cdots,p_k>\supset<q_1,q_2,\cdots,q_k>$. 下面我们要证明相反的包含关系,即$<p_1,p_2,\cdots,p_k>\subset<q_1,q_2,\cdots,q_k>$.

记 $A(x)=(a_{ij}(x))_{k\times k}$,由引理 5.1.5 条件知 $\det A(0)\neq0$,利用 $\det A(x)$的连续性,知存在原点的某个邻域 $W(0)$,当 $x\in W(0)$时有 $\det A(x)\neq0$,即 $x\in W(0)$时,$A^{-1}(x)$存在,此时

$$A^{-1}(x)=\frac{1}{\det A(x)}A^*(x), \tag{5.1.14}$$

其中 $A^*(x)$是 $A(x)$的伴随矩阵. 易知 $A^*(x)$的元素为光滑芽,从而 $A^{-1}(x)$的元素也都是光滑芽.

解关于 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 的线性方程组(5.1.13)得

$$p_i=\sum_{j=1}^{k}b_{ij}q_j,$$

其中 $b_{ij}\in\varepsilon_n$ 是 $A^{-1}(x)$的元素,由此易见

$$<p_1,p_2,\cdots,p_k>\subset<q_1,q_2,\cdots,q_k>.$$

证毕.

由引理 5.1.4、引理 5.1.5 可给出由式(5.1.11)导出式(5.1.12)的简化证明,事实上,

$$\begin{aligned}RT(x^2+\lambda) &= \langle x^2+\lambda, 2x^2, 2x\lambda\rangle \\ &= \langle x^2+\lambda, 2x^2\rangle \\ &= \langle x^2, \lambda\rangle.\end{aligned}$$

5.1.4　芽的有限确定性

令 $M=\{f\in\varepsilon_n: f(0)=0\}$,不难证明:$M$ 是 ε_n 中的一个理想,且由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 生成,即

$$M=\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle. \tag{5.1.15}$$

令 $M^2=M\cdot M, M^3=M\cdot M^2, \cdots, M^{k+1}=M\cdot M^k, \cdots$,由积理想定义可以证明

$$M^k=\langle x^\alpha: |\alpha|=k\rangle. \tag{5.1.16}$$

另外还可以证明

$$M^k=\{f\in\varepsilon_n: (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(0)=0, |\alpha|\leqslant k-1\}. \tag{5.1.17}$$

下面要讨论的芽 g 的有限确定性,关键在于判定是否存在整数 $k\geqslant 1$,使得 $M^k\subset RT(g)$, Nakayama 引理提供了一个有用且方便的检验方法.

引理 5.1.6　设 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$, k 为一正整数,若

$$M^k\subset RT(g)+M^{k+1},$$

则

$$M^k\subset RT(g).$$

引理 5.1.6 是下面 Nakayama 引理在 $F=M^k, G=RT(g)$ 时的特殊情形.

引理 5.1.7(Nakayama 引理)　设 F, G 均为 ε_n 中的理想,且 $F=\langle p_1, p_2, \cdots, p_l\rangle$ 是有限生成的,则 $F\subset G$ 当且仅当 $F\subset G+M\cdot F$.

证明　必要性是显然的,下面证明充分性.

设 $F\subset G+M\cdot F$,从而有

$$p_i=f_i+\sum_{j=1}^{l}a_{ij}p_j, \quad i=1,2,\cdots,l, \tag{5.1.18}$$

其中 $f_i\in G$, $a_{ij}\in M$,于是 $a_{ij}(0)=0$. 记 $A=(a_{ij})_{l\times l}$, I 是 $l\times l$ 单位阵,线性方程组(5.1.18)变形为

$$(I-A)\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_l\end{pmatrix}. \tag{5.1.19}$$

由于 $(I-A)(0)=I$,从而 $(I-A)$ 在原点的某个邻域内是可逆的,这样得到

$$\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_l\end{pmatrix}=(I-A)^{-1}\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_l\end{pmatrix}, \tag{5.1.20}$$

即

$$p_i=\sum_{j=1}^{l}b_{ij}f_j,\ i=1,2,\cdots,l,$$

这里 b_{ij} 是 $(I-A)^{-1}$ 的元素，结合 $f_j\in G(j=1,2,\cdots,l)$ 知，$p_i\in G(i=1,2,\cdots,l)$，故有 $F\subset G$. 证毕.

推论 5.1.1 (1) 设 $F=\langle p_1,p_2,\cdots,p_l\rangle$ 是 ε_n 中的理想，$q_i\in M\cdot F,i=1,2,\cdots,l$，则

$$F=\langle p_1+q_1,\cdots,p_l+q_l\rangle.$$

(2) 若芽 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$ 满足 $M^k\subset RT(g)$，则

$$g\overset{s}{\sim}j^kg,$$

其中 j^kg 是 g 在原点处的 k 阶 Taylor 多项式.

证明 (1) 此时就是要证明

$$\langle p_1,p_2,\cdots,p_l\rangle=\langle p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_l+q_l\rangle,$$

由 $q_i\in M\cdot F\subset F$ 可知

$$\langle p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_l+q_l\rangle\subset\langle p_1,p_2,\cdots,p_l\rangle;$$

反过来，由 $p_i=(p_i+q_i)-q_i\in\langle p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_l+q_l\rangle+M\cdot F$，得

$$F\subset\langle p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_l+q_l\rangle+M\cdot F.$$

再由 Nakayama 引理(引理 5.1.7)得

$$F\subset\langle p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_l+q_l\rangle.$$

(2) 令 $r=j^kg-g$，则 $r\in M^{k+1}$. 要证明 $g\overset{s}{\sim}j^kg$，由定理 5.1.2 知，只需证明

$$RT(g)=RT(g+tr),\ t\in[0,1].\tag{5.1.21}$$

我们说式(5.1.21)不难由(1)中结论推得. 事实上，在(1)中取

$$F=RT(g)=\langle g,xg_x,\lambda g_x\rangle\equiv\langle p_1,p_2,p_3\rangle,$$

及

$$q_1=tr,q_2=x(tr_x),q_3=\lambda(tr_x),$$

显然有

$$q_i\in M^{k+1}=M\cdot M^k\subset M\cdot F,i=1,2,3.$$

再由(1)中结论得

$$\begin{aligned}F&=\langle p_1+q_1,p_2+q_2,p_3+q_3\rangle\\&=\langle g+tr,x(g+tr)_x,\lambda(g+tr)_x\rangle\\&=RT(g+tr).\end{aligned}$$

故

$$RT(g)=RT(g+tr).$$

证毕.

定义 5.1.4 对于芽 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$，若存在整数 k 使得 g 与 j^kg 强等价，则称 g 为有限确定的.

注 推论 5.1.1(2)给出了判定芽 g 有限确定的充分条件. 我们知道，对于分岔问题 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$，在许多场合要考虑 g 的有限次截断 j^kg，此时判定 g 与 j^kg 是否强等价至关重要，实际上这相当于确定 j^kg 在拓扑同胚意义下是否保持了 g 的定性性质.

定义 5.1.5 设 $F\subset\varepsilon_n$ 是一线性子空间，若存在一有限维子空间 $V\subset\varepsilon_n$，使得

$$F+V=\varepsilon_n \tag{5.1.22}$$

则称 F 有有限余维;否则称 F 具有无穷余维.

在式(5.1.22)中,若还有 $F\cap V=\{0\}$,即有直和分解

$$F\oplus V=\varepsilon_n, \tag{5.1.23}$$

则此时 V 的维数是唯一确定的,称 $\dim V$ 为 F 的余维数,记为 codim F,于是

$$\text{codim } F=\dim V.$$

容易证明:对任何正整数 k,M^k 有有限余维.

定理 5.1.3 设线性子空间 $F\subset\varepsilon_n$ 为一理想,则 F 有有限余维的充要条件是存在整数 k 使得 $M^k\subset F$.

证明 充分性:即存在整数 k,使得 $M^k\subset F$,于是有

$$\text{codim } F\leqslant \text{codim } M^k<\infty.$$

必要性:此时 F 有有限余维,记 codim $F=l-1$.显然下列包含关系成立:

$$F\subset F+M^{l+1}\subset F+M^l\subset F+M^{l-1}\subset\cdots\subset F+M^2\subset F+M,$$

从而有

$$0\leqslant \text{codim }(F+M)\leqslant \text{codim }(F+M^2)\leqslant\cdots\leqslant \text{codim }(F+M^{l+1})\leqslant \text{codim } F=l-1,$$

因此存在正整数 $k\leqslant l$,满足

$$\text{codim }(F+M^k)=\text{codim }(F+M^{k+1}),$$

结合

$$F+M^{k+1}\subset F+M^k,$$

知必有

$$F+M^k=F+M^{k+1},$$

从而有

$$M^k\subset F+M^{k+1},$$

再由 Nakayama 引理得

$$M^k\subset F.$$

证毕.

定义 5.1.6 称 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$ 有有限余维,是指 $RT(g)$ 在 $\varepsilon_{x,\lambda}$ 中的余维数有限.

由推论 5.1.1 和定理 5.1.3 可得如下定理.

定理 5.1.4 若 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$ 有有限余维,则 g 是有限确定的.

5.1.5 内蕴理想

内蕴理想是研究识别问题的基本工具,我们的讨论在芽空间 $\varepsilon_{x,\lambda}$ 中进行.内蕴理想是指强等价变换下不变的理想.

定义 5.1.7 称理想 $G\subset\varepsilon_{x,\lambda}$ 是内蕴的(intrinsic),是指对 $\forall h\in\varepsilon_{x,\lambda}$,若 $g\in G$,$h\overset{s}{\sim}g$,则 $h\in G$.

命题 5.1.1 (1)M,$\langle\lambda\rangle$ 是内蕴理想;

(2)若 $G_1,G_2\subset\varepsilon_{x,\lambda}$ 是内蕴理想,则 G_1+G_2 和 $G_1\cdot G_2$ 也是内蕴理想;

(3)$M^{k_0}+M^{k_1}\langle\lambda^{m_1}\rangle+\cdots+M^{k_s}\langle\lambda^{m_s}\rangle$ 是(余维有限的)内蕴理想.

证明 留给读者作为练习.

定理 5.1.5 设 $G\subset\varepsilon_{x,\lambda}$ 是内蕴理想,则

(1)对于 $g\in G$,若 g 为多项式或余维有限,则 $RT(g)\subset G$;

(2)若 $x^l\lambda^m\in G$,则 $M^l<\lambda^m>\subset G$;

(3)若多项式 $p(x,\lambda)=\Sigma a_\alpha x^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\in G$,则对每个 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$,$a_\alpha\neq 0$ 时,有 $x^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\in G$;

(4)若 G 有有限余维,$p(x,\lambda)\in G$,其 Taylor 展开式为 $p(x,\lambda)=\Sigma a_\alpha x^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}$,则 $a_\alpha\neq 0$ 时,有 $x^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\in G$;

(5)若 G 有有限余维,则 G 可表示为

$$G=M^{k_0}+M^{k_1}<\lambda^{m_1}>+\cdots+M^{k_s}<\lambda^{m_s}>, \tag{5.1.24}$$

其中

$$0<m_1<m_2<\cdots<m_s, \tag{5.1.25a}$$

$$k_0>k_1+m_1>\cdots>k_s+m_s>0. \tag{5.1.25b}$$

证明 从略,可参见[20].

定义 5.1.8 在式(5.1.25)成立条件下,我们称单项式 $x^{k_0}, x^{k_1}\lambda^{m_1},\cdots,x^{k_s}\lambda^{m_s}$ 为内蕴理想(5.1.24)的内蕴生成子.

设理想 $G\subset\varepsilon_{x,\lambda}$ 有有限余维,记 $G^\perp$ 是 $\varepsilon_{x,\lambda}$ 中不属于 G 的单项式张成的子空间,易验证 $\dim G^\perp<+\infty$,且

$$\varepsilon_{x,\lambda}=G+G^\perp.$$

特别地,若 G 还是内蕴理想,则有

$$\varepsilon_{x,\lambda}=G\oplus G^\perp. \tag{5.1.26}$$

设理想 $G\subset\varepsilon_{x,\lambda}$ 有有限余维,用 $\mathrm{Itr}\,G$ 表示含于 G 中的最大内蕴理想. 我们首先说明这种最大内蕴理想的存在性. 事实上,由定理 5.1.3 知,存在整数 k 使 $M^k\subset G$,利用定理 5.1.5(5)知,仅存在有限多个内蕴理想 F 满足

$$M^k\subset F\subset G(\text{注意此时应有 } k\geqslant k_0), \tag{5.1.27}$$

且所有这些内蕴理想的和还是满足式(5.1.27)的内蕴理想,显然它是含于 G 内的最大内蕴理想,同时还知 $\mathrm{Itr}\,G$ 有有限余维.

推论 5.1.2 设 $G\subset\varepsilon_{x,\lambda}$ 有有限余维,则

$$G=(\mathrm{Itr}\,G)\oplus V, \tag{5.1.28}$$

其中 $V=G\cap(\mathrm{Itr}\,G)^\perp$.

证明 由于 $V=G\cap(\mathrm{Itr}\,G)^\perp$,据式(5.1.26)知 $(\mathrm{Itr}\,G)\cap V=\{0\}$,即式(5.1.28)右端确实是直和. 再者,$\forall f\in\varepsilon_{x,\lambda}$,记 $f=f_1+f_2$,其中 $f_1\in\mathrm{Itr}\,G$,$f_2\in(\mathrm{Itr}\,G)^\perp$. 特别是当 $f\in G$ 时,结合 $f_1\in\mathrm{Itr}\,G\subset G$ 可知 $f_2\in G$,因此 $f_2\in G\cap(\mathrm{Itr}\,G)^\perp=V$,这就证明了 $G=\mathrm{Itr}\,G+V$,故结论得证. 证毕.

5.1.6 识别问题

我们知道,对一个芽 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$ 进行识别时,需将其 Taylor 展式中的项划分为低阶项、中阶项、高阶项三类. 针对这三类单项式有三种不同的分析方法. 分别介绍如下.

低阶项 在研究低阶项时,我们需要概念"含有芽 g 的最小内蕴理想". 不难证明,若

$\{G_\alpha\}$是 $\varepsilon_{x,\lambda}$ 中的一族内蕴理想,则$\bigcap_\alpha G_\alpha$ 也是$\varepsilon_{x,\lambda}$中的内蕴理想,于是包含 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$的所有内蕴理想的交就是包含$g$ 的最小内蕴理想.我们用 $I(g)$表示含芽 g 的最小内蕴理想.

显然,若 $g\overset{s}{\sim}h$,则 $I(g)=I(h)$.事实上,由 $g\overset{s}{\sim}h$ 及$I(h)$为内蕴理想知 $g\in I(h)$,从而$I(g)\subset I(h)$,同样也有 $I(h)\subset I(g)$.

定理 5.1.6 设 $h\in\varepsilon_{x,\lambda}$有有限余维,则

(1)$I(h)$是有有限余维的内蕴理想;

(2) $$I(h)=\sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)}\{M^{\alpha_1}<\lambda^{\alpha_2}>:D^\alpha h(0,0)\neq 0\};\tag{5.1.29}$$

(3)设 $g\overset{s}{\sim}h$,则当 $x^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\in(I(h))^\perp$时,必有 $D^\alpha g(0,0)=0$;

(4)设 $g\overset{s}{\sim}h$,则当 $x^{\beta_1}\lambda^{\beta_2}$为 $I(h)$的内蕴生成子时,必有 $D^\beta g(0,0)\neq 0$.

证明 (1) 由 $I(h)$的定义知,$I(h)$是一内蕴理想,只需证明 $I(h)$有有限余维.由于$RT(h)$有有限余维,从而存在整数 k,使 $M^k\subset RT(h)$,由推论 5.1.1(2)知 $h\overset{s}{\sim}j^kh$,故有 $I(h)=I(j^kh)$,这样可假设 h 是一多项式,此时由定理 5.1.5(1)知 $RT(h)\subset I(h)$,于是 $I(h)$必有有限余维.

(2)同(1),不妨设 h 是多项式,这样式(5.1.29)右端实际上是有限项,由 $h\in I(h)$,再利用定理 5.1.5(3)、(2)知,$I(h)$包含式(5.1.29)的右端.另一方面,显然式(5.1.29)的右端为包含 h 的内蕴理想,再由 $I(h)$的最小性知,$I(h)$必然包含于式(5.1.29)的右端,于是结论(2)获证.

(3)(反证)设 $x^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\in(I(h))^\perp$,但 $D^\alpha g(0,0)\neq 0$,则由(2)知,$x^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\in I(g)=I(h)$,这与$x^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\in(I(h))^\perp$矛盾.

(4)设 $x^{\beta_1}\lambda^{\beta_2}$为 $I(h)$的内蕴生成子,因此有 $M^{\beta_1}<\lambda^{\beta_2}>\subset I(h)=I(g)$,再据(2)知

$$I(g)=\Sigma\{M^{\alpha_1}<\lambda^{\alpha_2}>:D^\alpha g(0,0)\neq 0\},$$

于是必有

$$D^\beta g(0,0)\neq 0.$$

证毕.

例 5.1.2 设 $h=x^3-\lambda x$,由定理 5.1.6(2)得

$$I(h)=M^3+M<\lambda>,$$

此时

$$(I(h))^\perp=R\{1,x,\lambda,x^2\},$$

这里 x^3,λx 是$I(h)$的内蕴生成子,结合定理 5.1.6(3)和(4)知:若 $g\overset{s}{\sim}h$,则必有:在$(x,\lambda)=(0,0)$处,

$$g=g_x=g_\lambda=g_{xx}=0,g_{xxx}\neq 0,g_{\lambda x}\neq 0.\tag{5.1.30}$$

式(5.1.30)提供了识别芽 g 与$h=x^2-\lambda x$ 强等价的一些关键信息,这些信息是通过 g 在原点处的函数值和一些低阶导数值给出的,这也看出本节提供的方法主要用于识别问题中低阶项的分析.

注 定理 5.1.6(3)、(4)给出了判断 g 与正规形h 强等价的识别条件.具体步骤是由定理 5.1.6(2)可求出 $I(h)$,进而再求出$(I(h))^\perp$,最后利用定理 5.1.6(3)、(4)的结论得出借助 g 及其低阶导数在$(x,\lambda)=(0,0)$处的值来描述的 g 与h 强等价的识别条件.

高阶项 为了识别高阶项,引入“扰动集”概念.

定义 5.1.9 芽 $h\in\varepsilon_{x,\lambda}$ 的扰动集定义为

$$P(h)=\{p\in\varepsilon_{x,\lambda}:RT(g+tp)=RT(g),\forall t\in\mathbf{R},g\overset{s}{\sim}h\}.$$

由 $P(h)$ 的定义及定理 5.1.2 即得下面的定理.

定理 5.1.7 设 $p\in P(h),g\overset{s}{\sim}h$,则 $g+tp\overset{s}{\sim}g,\forall t\in\mathbf{R}$.

命题 5.1.2 设 $h\in\varepsilon_{x,\lambda}$,则 $P(h)$ 是 $\varepsilon_{x,\lambda}$ 中的理想.

证明 要证明 $P(h)$ 是一理想,我们要证明两点:①若 $p_1,p_2\in P(h)$,则 $p_1-p_2\in P(h)$,再据加法交换性显然成立,即知 $P(h)$ 为一加群;②若 $p\in P(h),f\in\varepsilon_{x,\lambda}$,则 $fp\in P(h)$. 分别证明如下.

(1)设 $p_1,p_2\in P(h),g\overset{s}{\sim}h$. 由 $p_1\in P(h)$,有

$$\bar{g}\equiv g+tp_1\overset{s}{\sim}g\overset{s}{\sim}h,\ \forall t\in\mathbf{R},$$

再由 $p_2\in P(h)$,对 $\forall s\in\mathbf{R}$,得

$$RT(\bar{g}+sp_2)=RT(\bar{g}),$$

取 $s=-t$,有

$$RT(g+t(p_1-p_2))=RT(g+tp_1),$$

再利用 $p_1\in P(h)$,得

$$RT(g+tp_1)=RT(g),$$

故

$$RT(g+t(p_1-p_2))=RT(g),\forall t\in\mathbf{R},$$

于是

$$p_1-p_2\in P(h).$$

(2)设 $p\in P(h),f\in\varepsilon_{x,\lambda}$,应用 Taylor 公式于 f 得

$$f(x,\lambda)=s-k(x,\lambda).$$

这里 $s=f(0,0)$ 且 $k(0,0)=0$. 应用上面(1)证明的结论,要证明 $fp\in P(h)$,只需证明

$$sp\in P(h),kp\in P(h)$$

即可. 我们分别来证明.

(i) $\forall t\in\mathbf{R}$,由 $p\in P(h)$ 知

$$RT(g+t(sp))=RT(g+(ts)p)=RT(g).$$

再由 $P(h)$ 的定义便知

$$sp\in P(h).$$

(ii)由 $p\in P(h),g\overset{s}{\sim}h$,得

$$RT(g+p)=RT(g),$$

这样 $RT(g+p)$ 的三个生成子属于 $RT(g)$,由此易知

$$p,xp_x,\lambda p_x\in RT(g),$$

利用 $k\in M$,不难证得

$$kp,x(kp)_x,\lambda(kp)_x\in M\cdot RT(g).$$

$\forall t\in\mathbf{R}$,由推论 5.1.1(1)得

$$RT(g+tkp)=\langle g+tkp,xg_x+tx(kp)_x,\lambda g_x+t\lambda(kp)_x\rangle$$

$$= < g, xg_x, \lambda g_x > = RT(g),$$

故有

$$kp \in P(h).$$

证毕.

我们还可以证明如下结论.

定理 5.1.8　设 $h \in \varepsilon_{x,\lambda}$ 有有限余维，则 $P(h)$ 为 $\varepsilon_{x,\lambda}$ 中有有限余维的内蕴理想，且

$$\text{Itr}[M \cdot RT(h)] \subset P(h) \subset \text{Itr}\,TR(h).$$

定理 5.1.9　设 $h \in \varepsilon_{x,\lambda}$ 有有限余维，则

$$P(h) = \text{Itr}\ Q(h),$$

其中

$$Q(h) = < xh, \lambda h, x^2 h_x, \lambda h_x > = M \cdot RT(h) + \langle \lambda h_x \rangle.$$

定理 5.1.8 和定理 5.1.9 的证明可参见[20]，这里从略.

注　定理 5.1.9 给出了计算扰动集的方法，从而可确定哪些高阶项不出现在识别条件中.

例 5.1.3　对于芽 $h = x^3 - \lambda x$ 不难求得

$$RT(h) = RT(x^3 - \lambda x) = M^3 + M < \lambda >,$$

注意到 $\lambda h_x = 3x^2\lambda - \lambda^2$，我们有

$$Q(x^3 - \lambda x) = M^4 + M^2 < \lambda > + < \lambda^2 >.$$

显然 $Q(x^3 - \lambda x)$ 是内蕴的，由定理 5.1.9 得

$$P(x^3 - \lambda x) = M^4 + M^2 < \lambda > + < \lambda^2 >. \tag{5.1.31}$$

我们对式(5.1.31)的意义做一点说明. 如考虑单项式 $x^4 \in P(x^3 - \lambda x)$，由定理 5.1.7 知，若 $f \overset{s}{\sim} x^3 - \lambda x$，则 $f + tx^4 \overset{s}{\sim} x^3 - \lambda x\ (\forall t \in \mathbf{R})$. 通过变化 t，我们可使 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 f(0,0)$ 取任何值，换句话说，$(\frac{\partial}{\partial x})^4 f(0,0)$ 取何值并不影响 f 强等价于 $x^3 - \lambda x$，于是 $(\frac{\partial}{\partial x})^4 f(0,0)$ 不会出现在判定 f 是否与 $x^3 - \lambda x$ 强等价的识别条件中. 类似地，对于 $M^2 < \lambda >$ 或 $< \lambda^2 >$ 中的单项式，相应的高阶导数也不会出现在识别条件中.

中阶项　中阶项不像前面讲述的低阶项、高阶项那样清楚，这方面的描述需要 Lie 群的系统知识. 我们仅以一个例子说明对中阶项的分析. 事实上，这方面的分析主要是建立识别条件中的一些不等式(包含一些项的符号)，当然在一些复杂的识别问题中也可包含一个或多个等式.

例 5.1.4　设 $g \overset{s}{\sim} x^3 - \lambda x$，由式(5.1.30)、(5.1.31)知

$$g(x,\lambda) = ax^3 + b\lambda x + p(x,\lambda),$$

这里 $a \neq 0, b \neq 0$ 且 $p \in P(x^3 - \lambda x)$. 由定理 5.1.6 知，$g \overset{s}{\sim} x^3 - \lambda x$ 的充分必要条件为

$$\bar{g}(x,\lambda) = ax^3 + b\lambda x \tag{5.1.32}$$

强等价于 $x^3 - \lambda x$. 通过标度变换，我们可将 $\bar{g}$ 变为 $\varepsilon x^3 + \delta\lambda x$，其中 $\varepsilon = \text{sgn}\ a, \delta = \text{sgn}\ b$，这里 sgn 表示符号函数：

$$\text{sgn}\ x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

特别有

$$\varepsilon x^3+\delta\lambda x=\left|\frac{a}{b^3}\right|^{\frac{1}{2}}\bar{g}\left(\left|\frac{b}{a}\right|^{\frac{1}{2}}x,\lambda\right),$$

考虑到强等价变换中对 S,X 的限制：$S(0,0)>0,X_x(0,0)>0$. 对式(5.1.32)施行强等价变换不可能改变两个系数的符号，因此 $g\overset{s}{\sim}x^3-\lambda x$ 当且仅当 $a>0,b<0$，即在 $(x,\lambda)=(0,0)$ 处，

$$g_{xxx}>0,g_{\lambda x}<0.$$

在例 5.1.4 中，中阶项的分析主要是确定 $g_{xxx},g_{\lambda x}$ 的符号.

5.1.7 识别问题的几个例子

给出几种基本识别问题的解，其中 $\varepsilon,\delta=\pm 1$.

例 5.1.5 对于 $k\geqslant 2$，芽 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$ 强等价于 $h=\varepsilon x^k+\delta\lambda$ 当且仅当在 $x=\lambda=0$ 处

$$g=\frac{\partial g}{\partial x}=\cdots=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1}g=0,\tag{5.1.33a}$$

$$\varepsilon=\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g,\quad \delta=\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial g}{\partial\lambda}\right).\tag{5.1.33b}$$

证明 我们依照 5.1.6 的分析步骤给出证明. 记 $h=\varepsilon x^k+\delta\lambda$，由定理 5.1.6 (2)得

$$I(h)=M^k+\langle\lambda\rangle.\tag{5.1.34}$$

先证必要性. 设 $g\overset{s}{\sim}h$，由定理 5.1.6(3)、(4)知，式(5.1.33 a)成立，且有

$$g(x,\lambda)=ax^k+b\lambda+p(x,\lambda),\tag{5.1.35}$$

其中 $a\neq 0,b\neq 0$，且

$$p\in M^{k+1}+M\langle\lambda\rangle.$$

又因

$$RT(h)=M^k+\langle\lambda\rangle,$$

故由定理 5.1.9 得

$$P(h)=M^{k+1}+M\langle\lambda\rangle,$$

于是 $p\in P(h)$，这样就有

$$g\overset{s}{\sim}\bar{g}\equiv ax^k+b\lambda\overset{s}{\sim}h,$$

据例 5.1.4 中的标度变换分析，此时必有 a 与 ε，b 与 δ 同号，即式(5.1.33 b)成立.

再证充分性. 设式(5.1.33a)、(5.1.33b)成立，则 g 可表示为式(5.1.35)，再利用式(5.1.33b)及标度变换可证 $ax^k+b\lambda\overset{s}{\sim}h$，故有 $g\overset{s}{\sim}h$. 证毕.

例 5.1.6 对于 $k\geqslant 3$，芽 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$ 强等价于 $h=\varepsilon x^k+\delta\lambda x$ 当且仅当在 $x=\lambda=0$ 处，

$$g=\frac{\partial g}{\partial x}=\cdots=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1}g=\frac{\partial g}{\partial\lambda}=0,\tag{5.1.36a}$$

$$\varepsilon=\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g,\quad \delta=\operatorname{sgn}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\lambda}g.\tag{5.1.36b}$$

证明 由定理 5.1.6(2)得

$$I(h)=M^k+M\langle\lambda\rangle.\tag{5.1.37}$$

必要性：设 $g\overset{s}{\sim}h$，由定理 5.1.6(3)、(4)知，式(5.1.36a)成立，且有

$$g(x,\lambda)=ax^k+b\lambda x+p(x,\lambda),\tag{5.1.38}$$

其中 $a\neq 0,b\neq 0$，且

$$p\in M^{k+1}+M^2<\lambda>+<\lambda^2>.$$

由定理 5.1.9 可计算出

$$P(h)=M^{k+1}+M^2<\lambda>+<\lambda^2>,$$

于是 $p\in P(h)$,因此

$$g\overset{s}{\sim}\bar{g}\equiv ax^k+b\lambda x\overset{s}{\sim}h,$$

通过标度变换分析便知式(5.1.36b)成立.

充分性:论证过程类似上例,此处从略.证毕.

例 5.1.7　$g\in\epsilon_{x,\lambda}$ 强等价于 $h=(x^2+\delta\lambda^2)$ 当且仅当在 $x=\lambda=0$ 处,

$$g=g_x=g_\lambda=0, \tag{5.1.39a}$$

$$\epsilon=\operatorname{sgn} g_{xx},\quad \delta=\operatorname{sgn}\det d^2g, \tag{5.1.39b}$$

其中 d^2g 是 g 的二阶导数的 Hesse 矩阵: $d^2g=\begin{bmatrix} g_{xx} & g_{x\lambda}\\ g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda}\end{bmatrix}$.

证明　此时 $I(h)=M^2$.

必要性:设 $g\overset{s}{\sim}h$,由定理 5.1.6(3)、(4)知,式(5.1.39a)成立,且有

$$g(x,\lambda)=ax^2+p(x,\lambda), \tag{5.1.40}$$

其中 $a\neq0, p\in M^3+M<\lambda>$.由于此时 $P(h)=M^3$,所以在强等价意义下式(5.1.40)右边的余项不可能全部去掉,记

$$g(x,\lambda)=ax^2+b\lambda x+c\lambda^2+\bar{p}(x,\lambda), \tag{5.1.41}$$

其中 $\bar{p}\in M^3$,就有

$$g(x,\lambda)\overset{s}{\sim}\bar{g}\equiv ax^2+b\lambda x+c\lambda^2\overset{s}{\sim}h,$$

考虑到强等价变换不能改变 $\operatorname{sgn} g_{xx}$ 及 $\operatorname{sgn}\det d^2g$,便知必有式(5.1.39b)成立.

充分性:设式(5.1.39a)、(5.1.39b)成立,则 g 可写成式(5.1.41)的形式,从而也有

$$g(x,\lambda)\overset{s}{\sim}\bar{g}\equiv ax^2+b\lambda x+c\lambda^2,\ b^2-4ac\neq0,$$

再由

$$\bar{g}\overset{s}{\sim}\bar{g}\left(x-\frac{b}{2a}\lambda,\lambda\right)=ax^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\lambda^2,$$

便知 $g\overset{s}{\sim}h$.证毕.

例 5.1.8　$g\in\epsilon_{x,\lambda}$ 强等价于 $\epsilon x^3+\delta\lambda^2$,当且仅当在 $x=\lambda=0$ 处

$$g=g_x=g_\lambda=g_{xx}=g_{x\lambda}=0,\ \epsilon=\operatorname{sgn} g_{xxx},\delta=\operatorname{sgn} g_{\lambda\lambda}.$$

证明 由

$$I(h)=M^3+<\lambda^2>$$

及

$$P(h)=M^4+M^2<\lambda>,$$

可用类似上面的论证得出结论.证毕.

为了便于应用,表 5.1.1 总结了几类有代表性的多项式函数 $h(x,\lambda)$ 的识别条件,这些简单函数 $h(x,\lambda)$ 称为GS(Golubitsky-Schaeffer)范式(或正规形式).

表 5.1.1　一些 GS 范式的识别条件($\varepsilon,\delta=\pm 1$)

编号	GS 范式	在 $x=\lambda=0$ 处的识别条件
1	$\varepsilon x^k+\delta\lambda$ $(k\geqslant 2)$	$g=g_x=\cdots=\partial^{k-1}g/\partial x^{k-1}=0$ $\varepsilon=\mathrm{sgn}(\partial^k g/\partial x^k),\delta=\mathrm{sgn}\ g_\lambda$
2	$\varepsilon x^k+\delta\lambda x$ $(k\geqslant 3)$	$g=g_x=\cdots=\partial^{k-1}g/\partial x^{k-1}=g_\lambda=0$ $\varepsilon=\mathrm{sgn}(\partial^k g/\partial x^k),\delta=\mathrm{sgn}\ g_{x\lambda}$
3	$\varepsilon x^2+\delta\lambda$	$g=g_x=g_\lambda=0$ $\varepsilon=\mathrm{sgn}g_{xx},\delta=\mathrm{sgn}\ \det \mathrm{d}^2 g$
4	$\varepsilon x^2+\delta\lambda^3$	$g=g_x=g_\lambda=\det \mathrm{d}^2 g=0$ $\varepsilon=\mathrm{sgn}\ g_{x\lambda},\delta=\mathrm{sgn}\ g_{vvv}{}^*$
5	$\varepsilon x^2+\delta\lambda^4$	$g=g_x=g_\lambda=\det \mathrm{d}^2 g=g_{vvv}=0$ $\varepsilon=\mathrm{sgn}\ g_{xx},\delta=\mathrm{sgn}\ q^*$
6	$\varepsilon x^3+\delta\lambda^2$	$g=g_x=g_\lambda=g_{xx}=g_{x\lambda}=0$ $\varepsilon=\mathrm{sgn}\ g_{xxx},\delta=\mathrm{sgn}\ g_{\lambda\lambda}$

* **注**　$q=g_{vvvv}g_{xx}-3g_{vvx}^2$，$v$ 是 Hesse 矩阵 $\mathrm{d}^2 g=\begin{bmatrix} g_{xx} & g_{x\lambda} \\ g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$对应于零特征值的特征向量，$g_v$ 表示 g 沿方向 v 的方向导数.

对于实际问题给出的方程 $g(x,\lambda)=0$，只要 g 满足上表中某个范式 h 的识别条件，就可以由范式 h 得知 g 的静态分岔性态.

许多高维以至无穷维静态分岔问题可以通过 LS 约化方法化为单变量静态分岔问题. 不过，一般难以得到约化函数 g 的显式表示，尽管如此，由 LS 约化过程知道，此时我们仍可直接利用原来函数的导数去计算约化函数的各阶导数. 因此奇异性理论特别适合于与 LS 方法结合去研究静态分岔问题.

还要指出，本章关于识别条件的讨论，是对已知的 GS 范式进行的. 在实际应用中如何寻找合适的 GS 范式，通常是一个十分复杂的问题.

5.2　普适开折理论

我们知道，方程往往是对真实的物理、化学等现象做一定简化后得到的理想的数学模型，真实状态与理论状态之间有一定差别，我们可以把真实状态看作理想状态的扰动，并研究这种扰动对方程的分岔性态的影响. 我们通过引进附加参数，即所谓"开折"(unfolding)的方法，去考虑可能出现的扰动. 普适开折理论主要研究分岔问题的扰动、持久性结构和分类等问题.

5.2.1　普适开折及切空间

我们知道，普适开折理论是建立在芽的等价意义上的，等价是比强等价更广泛的概念.

定义 5.2.1　称芽 $f,g\in\varepsilon_{x,\lambda}$ 是等价的，记为 $f\sim g$，若存在 C^∞ 同胚：$(x,\lambda)\to(X(x,\lambda),$

$\Lambda(\lambda)$) 及 $S(x,\lambda)\in\varepsilon_{x,\lambda}$,使得

$$g(x,\lambda)=S(x,\lambda)f(X(x,\lambda),\Lambda(\lambda)),\tag{5.2.1}$$

其中

$$S(0,0)>0,\ X(0,0)=0,\ \Lambda(0)=0\ ,X_x(0,0)>0,\ \Lambda'(0)>0.$$

特别,当 $\Lambda(\lambda)\equiv\lambda$ 时,等价就是强等价.

定义 5.2.2　对芽 $g(x,\lambda)\in\varepsilon_{x,\lambda}$,如果存在芽 $G(x,\lambda,\alpha)\in\varepsilon_{x,\lambda,\alpha}$,其中

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\in\mathbf{R}^k\ (k\geqslant 0),$$

使得

$$G(x,\lambda,0)=g(x,\lambda),\tag{5.2.2}$$

则称 G 是 g 的一个 k-参数开折,α 称为开折参数.

特别地,g 的 0-参数开折就是 g 本身,由于

$$G(x,\lambda,\alpha)=g(x,\lambda)+[G(x,\lambda,\alpha)-G(x,\lambda,0)],$$

所以我们可将 $G(x,\lambda,\alpha)$视为 $g(x,\lambda)$的一个扰动,这个扰动与 k 个附加参数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 有关.

显然 g 的开折有无穷多个.下面讨论它们之间的关系.

定义 5.2.3　设 $G(x,\lambda,\alpha)(\alpha\in\mathbf{R}^k)$,$H(x,\lambda,\beta)(\beta\in\mathbf{R}^l)$是芽 $g(x,\lambda)$的两个开折,如果存在 $S,X\in\varepsilon_{x,\lambda,\beta}$,$\Lambda\in\varepsilon_{\lambda,\beta}$及 C^∞ 映射 $A:(\mathbf{R}^l;0)\to(\mathbf{R}^k;0)$(这里记号$(\mathbf{R}^k;0)$表示 $\mathbf{R}^k$ 中原点 O 的一个邻域),使得

$$H(x,\lambda,\beta)=S(x,\lambda,\beta)G(X(x,\lambda,\beta),\Lambda(\lambda,\beta),A(\beta)),\tag{5.2.3}$$

其中

$$S(x,\lambda,0)\equiv 1,X(x,\lambda,0)\equiv x,\Lambda(\lambda,0)\equiv\lambda,A(0)=0,$$

则称 H 可由 G 代理.

式(5.2.3)表明,对开折 H 的每个元素$(\cdot,\cdot,\beta)$,都可找到开折 G 的某个元素 $G(\cdot,\cdot,A(\beta))$与它等价,即在等价意义下,开折 G 包含了由开折 H 给出的一切扰动.

定义 5.2.4　设 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$,$G$ 是 g 的某个开折,若 g 的任何开折都可由 G 代理,则称 G 是 g 的一个通用(versal)开折.所含参数数目最少的通用开折称为普适(universal)开折,其开折参数个数称为 g 的余维数,记作 codim g.若 g 没有普适开折,则称 g 的余维数为无穷大.

由定义知,g 的普适开折 G 在等价意义下,包含了 g 的所有扰动函数,且 G 含有最少数目的开折参数. 因此,在研究 $g=0$ 受扰后可能出现的各种分岔行为时,普适开折将起着十分重要的作用.

设 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$,$G(x,\lambda,\alpha)$为 g 的普适开折. $\forall q\in\varepsilon_{x,\lambda}$,考虑 g 的单参数开折

$$H(x,\lambda,\varepsilon)=g(x,\lambda)+\varepsilon q(x,\lambda),\tag{5.2.4}$$

由于 G 为普适开折,故 H 可由 G 代理,从而有

$$H(x,\lambda,\varepsilon)=S(x,\lambda,\varepsilon)G(X(x,\lambda,\varepsilon),\Lambda(\lambda,\varepsilon),A(\varepsilon)),\tag{5.2.5}$$

其中

$$S(x,\lambda,0)=1,X(x,\lambda,0)=x,\Lambda(\lambda,0)=\lambda,A(0)=0.$$

在式(5.2.5)中关于 ε 求导,并令 $\varepsilon=0$ 得

$$q(x,\lambda)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}[S(x,\lambda,\varepsilon)g(X(x,\lambda;\varepsilon),\Lambda(\lambda,\varepsilon))]|_{\varepsilon=0}+\sum_{i=1}^{k}\dot{A}_i(0)\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial\alpha_i}$$

$$= \dot{S}(x,\lambda,0)g(x,\lambda) + g_x(x,\lambda)\dot{X}(x,\lambda,0) + g_\lambda(x,\lambda)\dot{\Lambda}(\lambda,0) + \sum_{i=1}^{k}\dot{\text{A}}_i(0)\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_i}. \tag{5.2.6}$$

定义 5.2.5 设 $g\in \varepsilon_{x,\lambda}$，$g$ 的切空间记为 $T(g)$，定义为

$$T(g) = \{ag + bg_x + cg_\lambda : a,b\in \varepsilon_{x,\lambda}, c\in \varepsilon_\lambda\}.$$

注 显然切空间是线性空间，但一般不是 $\varepsilon_{x,\lambda}$ 中的理想.

下面我们推导 G 是 g 的普适开折的必要条件.

上面已证明：当 G 为 g 的普适开折时，$\forall q\in \varepsilon_{x,\lambda}$，$q$ 一定可以表示为式(5.2.6)的形式，即

$$q\in T(g) + R\left\{\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_2}, \cdots, \frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_k}\right\},$$

这就是说，G 是 g 的普适开折时，必有

$$\varepsilon_{x,\lambda} = T(g) + R\left\{\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_1}, \cdots, \frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_k}\right\}. \tag{5.2.7}$$

式(5.2.7)不仅是普适开折的必要条件，而且还是通用性的充分条件.

定理 5.2.1 设 $g\in \varepsilon_{x,\lambda}$，$G$ 是 g 的一个 k - 参数开折，则 G 是 g 的通用开折当且仅当

$$\varepsilon_{x,\lambda} = T(g) + R\left\{\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_1}, \cdots, \frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_k}\right\}. \tag{5.2.8}$$

充分性证明参见[20]，这里从略.

由定义 5.2.4 知，芽 g 的通用开折 G 所含参数个数最小时就是 g 的普适开折，显然在 g 的通用开折中这个最小个数就是使式(5.2.8)成立的最小数 k. 易见使式(5.2.8)成立的最小数 k 就是 codim $T(g)$.

推论 5.2.1 芽 g 的通用开折 G 是 g 的普适开折，当且仅当 G 所含参数的个数等于 codim $T(g)$.

推论 5.2.2 设 $G\in \varepsilon_{x,\lambda,\alpha}$ 是 $g\in \varepsilon_{x,\lambda}$ 的 k - 参数开折，则 G 是普适开折当且仅当

$$\varepsilon_{x,\lambda} = T(g)\oplus R\left\{\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_1}, \cdots, \frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_k}\right\}. \tag{5.2.9}$$

推论 5.2.3 设芽 $g\in \varepsilon_{x,\lambda}$ 有余维数 k，若存在 k 个芽 $p_1,\cdots,p_k\in \varepsilon_{x,\lambda}$ 使得

$$\varepsilon_{x,\lambda} = T(g)\oplus R\{p_1,\cdots,p_k\}, \tag{5.2.10}$$

则

$$G(x,\lambda,\alpha) = g(x,\lambda) + \sum_{j=1}^{k}\alpha_j p_j(x,\lambda) \tag{5.2.11}$$

是 g 的一个普适开折.

推论 5.2.4 芽 $g\in \varepsilon_{x,\lambda}$ 有有限余维当且仅当 $T(g)$ 有有限余维，且

$$\text{codim } g = \text{codim } T(g). \tag{5.2.12}$$

5.2.2 普适开折的计算

由 5.2.1 的讨论知道，为了求芽 $g\in \varepsilon_{x,\lambda}$ 的普适开折，我们需求出切空间 $T(g)$ 及 $T(g)$ 在 $\varepsilon_{x,\lambda}$ 中的补空间的一组基. 由于 $T(g)$ 一般不是理想，致使那里使用的一些代数理论在这里不能使用，尤其是利用单项式来构造补空间的一组基这个关键技巧不能直接应用，我们这里使用

一些修正技巧来完成普适开折的构造.

引理 5.2.1　$RT(g)$有有限余维,当且仅当 $T(g)$有有限余维.

证明　从略,参见[20].

定理 5.2.2　设 $g\in\epsilon_{x,\lambda}$有有限余维,则存在 $l\geqslant 0$,使得

$$T(g)=RT(g)\oplus R\{g_x,g_\lambda,\lambda g_\lambda,\cdots,\lambda^l g_\lambda\}.$$

证明　我们知道 $T(g)$中元素可写为

$$a(x,\lambda)g+b(x,\lambda)g_x+c(\lambda)g_\lambda. \tag{5.2.13}$$

当 $b(0,0)=0,c(\lambda)\equiv 0$ 时,式(5.2.13)给出的芽属于 $RT(g)$,于是得

$$T(g)=RT(g)+R\{g_x\}+\epsilon_\lambda\{g_\lambda\}, \tag{5.2.14}$$

其中 ϵ_λ(类似于定义 5.1.1)定义为原点邻近 λ 的 C^∞ 函数的芽空间.由上节推论 5.2.4 及引理 5.2.1 知,$RT(g)$有有限余维,于是对充分大的 s 必有 $\lambda^s\in RT(g)$,进而 $\lambda^s g_\lambda\in RT(g)$.由于 $RT(g)$是一理想,因此存在唯一整数 $l\geqslant 0$ 使得

$$\lambda^l g_\lambda\notin RT(g),且\ \lambda^{l+1}g_\lambda\in RT(g). \tag{5.2.15}$$

由式(5.2.14)、(5.2.15)即见定理结论成立.证毕.

注　在求得限制切空间 $RT(g)$后,定理 5.2.2 给出了计算切空间的方法.

设 $g\in\epsilon_{x,\lambda}$有有限余维,我们能够证明含于 $T(g)$中的最大内蕴理想 Itr $T(g)$存在.事实上,由引理 5.2.1 知,$RT(g)$有有限余维,从而存在整数 k,使得

$$M^k\subset RT(g)\subset T(g),$$

这样仅有有限个内蕴理想 G 满足

$$M^k\subset G\subset T(g).$$

所有这些内蕴理想的和是含于 $T(g)$内的最大内蕴理想,仍记为 Itr $T(g)$.

对于切空间 $T(g)$可以证明

$$T(g)=[\mathrm{Itr}\ T(g)]\oplus V_g,$$

其中

$$V_g=T(g)\cap[\mathrm{Itr}\ T(g)]^\perp.$$

有了以上的准备,我们可给出求芽 $g\in\epsilon_{x,\lambda}$的普适开折的步骤:

(1)确定整数 $l\geqslant 0$,使得

$$T(g)=RT(g)\oplus R\{g_x,g_\lambda,\lambda g_\lambda,\cdots,\lambda^l g_\lambda\}; \tag{5.2.16}$$

(2)将 $T(g)$分解为下述形式

$$T(g)=[\mathrm{Itr}\ T(g)]\oplus V_g, \tag{5.2.17}$$

其中

$$V_g=T(g)\cap[\mathrm{Itr}\ T(g)]^\perp;$$

(3)在$[\mathrm{Itr}\ T(g)]^\perp$中找出 V_g 的补基 $p_1,p_2,\cdots,p_k$,即

$$[\mathrm{Itr}\ T(g)]^\perp=V_g\oplus R\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}, \tag{5.2.18}$$

则

$$G(x,\lambda,\alpha)=g(x,\lambda)+\sum_{i=1}^k\alpha_i p_i(x,\lambda) \tag{5.2.19}$$

就是 g 的普适开折.

事实上,由式(5.2.17)、(5.2.18)知 $k=\operatorname{codim} T(g)$,且式(5.2.10)成立,由推论 5.2.3 知,式(5.2.19)给出的 G 就是 g 的普适开折.

例 5.2.1 计算 $g=x^3-\lambda x$ 的余维数及普适开折.

解 易知

$$RT(g)=M^3+M<\lambda>.$$

由于

$$\lambda g_\lambda=-x\lambda\in RT(g),$$

所以

$$T(g)=(M^3+M<\lambda>)\oplus R\{3x^2-\lambda,x\}. \tag{5.2.20}$$

显然式(5.2.20)具有式(5.2.17)的形式,这样就有

$$[\operatorname{Itr} T(g)]^\perp=(M^3+M<\lambda>)^\perp=R\{1,x,\lambda,x^2\}.$$

故 $V_g=R\{3x^2-\lambda,x\}$ 在 $R\{1,x,\lambda,x^2\}$ 中的补基为 $\{1,x^2\}$ 或 $\{1,\lambda\}$,因而 $g=x^3-\lambda x$ 的普适开折为

$$G_1(x,\lambda,\alpha,\beta)=x^3-\lambda x+\alpha+\beta x^2,$$

或

$$G_2(x,\lambda,\alpha,\beta)=x^3-\lambda x+\alpha+\beta\lambda,$$

且 $\operatorname{codim} g=2$.

例 5.2.2 计算 $g=x^2+\lambda$ 的余维数及普适开折.

解 易知

$$RT(g)=M^2+<\lambda>,$$

且

$$T(g)=\varepsilon_{x,\lambda},$$

于是 $g=x^2+\lambda$ 的余维数为零,普适开折即为其本身.

表 5.2.1 列出了几种芽的余维数和普适开折.

表 5.2.1 几种芽的余维数和普适开折

g	codim g	普适开折
(1)$x^n+\lambda(n\geqslant 2)$	$n-2$	$g+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_{n-2}x^{n-2}$
(2)$x^n+\lambda x(n\geqslant 3)$	$n-1$	$g+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}$
(3)$x^2\pm\lambda^2$	1	$g+\alpha_1$
(4)$x^3+\lambda^2$	3	$g+\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x\lambda$
(5)$x^5+x^3\lambda+\lambda^2$	6	$g+\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\alpha_4\lambda+\alpha_5\lambda x+\alpha_6\lambda x^2$

例 5.2.3(余维 1 分岔)　从表 5.2.1 我们知道 $g_1=x^2-\lambda^2$，$g_2=x^2+\lambda^2$ 均有余维 1，其普适开折分别为

$$G_1(x,\lambda,\alpha)=x^2-\lambda^2+\alpha,\ G_2(x,\lambda,\alpha)=x^2+\lambda^2+\alpha,\ \alpha\in\mathbf{R}. \tag{5.2.21}$$

对于芽 $g_3=x^3-\lambda$，不难得到 codim $g_3=1$，且 g_3 的普适开折为

$$G_3(x,\lambda,\alpha)=x^3-\lambda+\alpha x. \tag{5.2.22}$$

图 5.2.1～5.2.3 分别给出了它们的分岔图. $g_1=x^2-\lambda^2$ 的奇异点(0,0)通常称为简单分岔点；$g_2=x^2+\lambda^2$ 的奇异点(0, 0)称为孤立点；$g_3=x^3-\lambda$ 的奇异点(0, 0)称为滞后点. 从图 5.2.1～5.2.3 可以看出，对 $g_i(i=1,2,3)$的任意小的扰动($\alpha\neq0$)，都会完全改变分岔的性态.

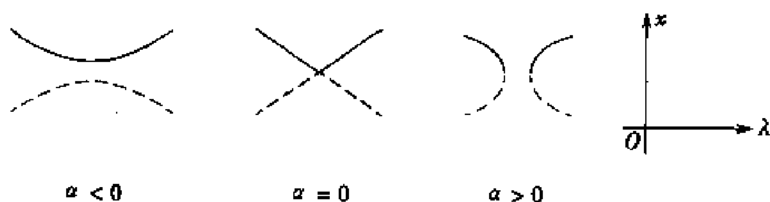


图 5.2.1　简单分岔 $x^2-\lambda^2+\alpha=0$

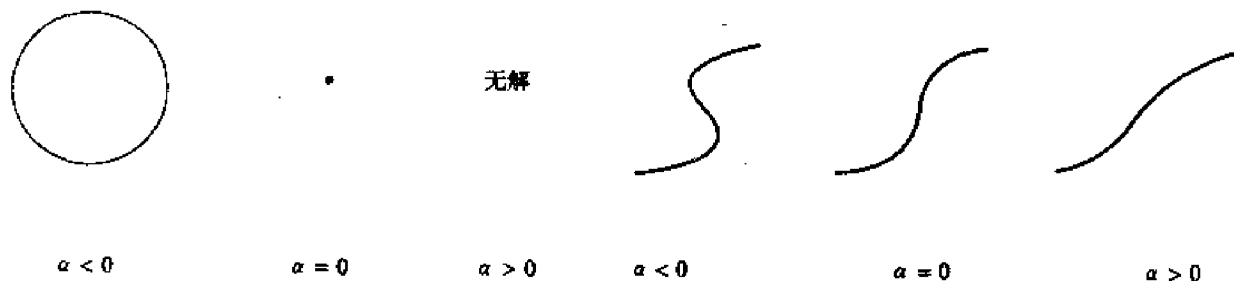


图 5.2.2　孤立点分岔 $x^2+\lambda^2+\alpha=0$

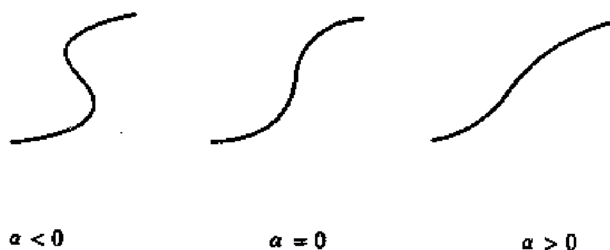


图 5.2.3　滞后点分岔 $x^3-\lambda+\alpha x=0$

5.2.3　普适开折的识别

普适开折的识别是指如何判定一个给定的开折是否是普适开折. 推论 5.2.3 把它归结为求切空间 $T(g)$及其补空间，这种计算通常很繁琐，但当 g 是正规形时，计算相对简单. 因此人们需要考察能否通过对与 g 强等价的正规形 h 验证与推论 5.2.3 类似的条件来判断 g 的某个开折 G 是否普适.

定理 5.2.3 若 $g\overset{s}{\sim}h$，则 Itr $T(g)=$ Itr $T(h)$.

证明　从略，参见[20].

当 g 有有限余维时，存在整数 k 使 $M^k\subset T(g)$，因 M^k 是内蕴的，故 $M^k\subset$ Itr $T(g)$，因而 Itr $T(g)$有有限余维. 由 5.1 中式(5.1.26)知

$$\varepsilon_{x,\lambda}=\text{Itr } T(g)\oplus[\text{Itr } T(g)]^{\perp}, \tag{5.2.23}$$

因此

$$T(g)=\text{Itr } T(g)\oplus V_g, \tag{5.2.24}$$

其中

$$V_g = T(g)\cap[\mathrm{Itr}\ T(g)]^{\perp},$$

于是,由推论 5.2.2 知,G 是 g 的普适开折,当且仅当

$$\varepsilon_{x,\lambda} = \mathrm{Itr}\ T(g)\oplus V_g \oplus R\left\{\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_1},\cdots,\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_k}\right\}. \tag{5.2.25}$$

前面已经指出,普适开折的识别主要是想利用与 g 强等价的正规形 h 的信息来判断 g 的开折 G 是否是普适的.下面我们将说明,由式(5.2.25)验证 G 的普适性可转化为在有限维空间$[\mathrm{Itr}\ T(h)]^{\perp}$上进行检验.

由定理 5.2.3 知,$V_g\subset[\mathrm{Itr}\ T(h)]^{\perp}$.然而式(5.2.25)中第三项通常并不含于$[\mathrm{Itr}\ T(h)]^{\perp}$,我们引入投影算子 J,将其投影到$[\mathrm{Itr}\ T(h)]^{\perp}$上.

设

$$\varepsilon_{x,\lambda} = \mathrm{Itr}\ T(h)\oplus[\mathrm{Itr}\ T(h)]^{\perp}. \tag{5.2.26}$$

定义投影算子 J:

$$\varepsilon_{x,\lambda}\rightarrow[\mathrm{Itr}\ T(h)]^{\perp}, \tag{5.2.27}$$

$$Jf = \sum_{\alpha}{}' \frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(0,0)x^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2},\ \forall f\in\varepsilon_{x,\lambda}, \tag{5.2.28}$$

其中$\sum'$表示对于不属于 $\mathrm{Itr}\ T(h)$的单项式求和.再由定理 5.2.3 知式(5.2.25)等价于

$$[\mathrm{Itr}\ T(h)]^{\perp} = V_g \oplus R\left\{J\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_1},\cdots,J\frac{\partial G(x,\lambda,0)}{\partial \alpha_k}\right\}. \tag{5.2.29}$$

结合定理 5.2.1、推论 5.2.2 可得下面定理.

定理 5.2.4 设 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$强等价于 h,G 是 g 的 k - 参数开折,则 G 是 g 的普适开折当且仅当式(5.2.29)成立;G 是 g 的通用开折当且仅当式(5.2.29)中直和为和.

注 定理 5.2.4 表明要验证 G 是 g 的普适开折,只需验证式(5.2.29)成立.

验证式(5.2.29)时,需要确定 V_g 的一组基,这可通过下述过程来完成.显然,V_g 是 J 作用在 $T(g)$上的像,由切空间的定义知,V_g 由形如

$$J(x^r\lambda^s g),J(x^r\lambda^s g_x),J(\lambda^s g_\lambda) \tag{5.2.30}$$

的芽生成,其中 $r,s\geqslant 0$,据有限确定性知,式(5.2.30)中仅有有限项非零.在决定选哪些项组成 V_g 的基时,通常要使用相应正规形的识别条件,下面以例子说明.

例 5.2.4 设 $g\overset{s}{\sim}h=\varepsilon x^3+\delta\lambda$,$\varepsilon=\pm1$,$\delta=\pm1$,$G$ 是 g 的单参数开折,则 G 是 g 的普适开折,当且仅当在$(x,\lambda,\alpha)=(0,0,0)$处

$$\det\begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x}\\ G_\alpha & G_{\alpha x}\end{pmatrix}\neq 0. \tag{5.2.31}$$

注 由于在 $\alpha=0$ 处,$G(x,\lambda,0)=g(x,\lambda)$,从而式(5.2.31)的第一行也可用 G 代替 g.

证明 为确定计,我们讨论 $h=x^3+\lambda$,其他情形同样讨论.

不难求得

$$T(h)=T(x^3+\lambda)=(M^2+\langle\lambda\rangle)\oplus R\{1\},$$

因此

$$[\mathrm{Itr}\ T(h)]^{\perp}=(M^2+\langle\lambda\rangle)^{\perp}=R\{1,x\},$$

于是

$$Jg = g(0,0) + g_x(0,0)x, \tag{5.2.32a}$$

或用坐标表示为

$$Jg = (g(0,0), g_x(0,0)). \tag{5.2.32b}$$

从而 G 是 g 的普适开折,当且仅当

$$R\{1,x\} = V_g \oplus R\left\{J\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right\}. \tag{5.2.33}$$

我们应通过式(5.2.30)选取 V_g 的一组基,具体做法如下.由于

$$g \overset{s}{\sim} h = x^3 + \lambda,$$

由强等价的识别条件可得:在 $(x,\lambda)=(0,0)$ 处,

$$g = g_x = g_{xx} = 0,$$

由式(5.2.32)知

$$Jg = 0,\ Jg_x = 0, J(\lambda g_\lambda) = 0.$$

因此,在式(5.2.30)中仅有 $Jg_\lambda \neq 0$,故 Jg_λ 是 V_g 的基,于是式(5.2.33)成为

$$R\{1,x\} = R\{Jg_\lambda, JG_\alpha\}. \tag{5.2.34}$$

式(5.2.34)成立当且仅当 Jg_λ, JG_α 线性无关,即式(5.2.31)成立.于是得出:G 是 g 的普适开折,当且仅当在 $(x,\lambda,\alpha)=(0,0,0)$ 处式(5.2.31)成立.证毕.

例 5.2.5 设 $g \overset{s}{\sim} h = \varepsilon x^3 + \delta\lambda x$, $\varepsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$, $G(x,\lambda,\alpha,\beta)$ 是 g 的 2-参数开折,则 G 是 g 的普适开折,当且仅当在 $(x,\lambda,\alpha,\beta)=(0,0,0,0)$ 处,

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{x\lambda} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} \end{bmatrix} \neq 0. \tag{5.2.35}$$

证明 我们仅对 $h = x^3 - \lambda x$ 的情形证明,其他情形类似可证.容易求得

$$T(h) = T(x^3 - \lambda x) = (M^3 + M\langle\lambda\rangle) \oplus R\{3x^2 - \lambda, x\},$$

于是

$$[\text{Itr } T(h)]^\perp = R\{1, x, \lambda, x^2\},$$

因此

$$Jg = g(0,0) + g_x(0,0)x + g_\lambda(0,0)\lambda + \frac{1}{2}g_{xx}(0,0)x^2, \tag{5.2.36}$$

故 G 是 g 的普适开折,当且仅当

$$R\{1,x,\lambda,x^2\} = V_g \oplus R\{JG_\alpha, JG_\beta\}. \tag{5.2.37}$$

另一方面,不难知道:当 $g \overset{s}{\sim} h = x^3 - \lambda x$ 时,必有识别条件:在 $(x,\lambda)=(0,0)$ 处,

$$g = g_x = g_{xx} = g_\lambda = 0, \tag{5.2.38}$$

因此

$$Jg = 0,\ J(xg_x) = 0,\ J(\lambda g_x) = 0,\ J(\lambda g_\lambda) = 0,$$

即在式(5.2.30)中仅有 Jg_x, Jg_λ 不为零,故此时式(5.2.37)成为

$$R\{1,x,\lambda,x^2\}=R\{Jg_x,Jg_\lambda,JG_\alpha,JG_\beta\}. \tag{5.2.39}$$

式(5.2.39)成立当且仅当 $Jg_x,Jg_\lambda,JG_\alpha,JG_\beta$ 线性无关，即式(5.2.35)成立. 证毕.

例 5.2.6 设 $g\overset{s}{\sim}h=\varepsilon x^3+\delta\lambda^2,\epsilon=\pm1,\delta=\pm1,G(x,\lambda,\alpha,\beta,\gamma)$ 是 g 的 3－参数开折，则 G 是 g 的普适开折，当且仅当在 $(x,\lambda,\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0,0,0)$ 处，

$$\det\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & g_{xxx} & g_{xx\lambda}\\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & \lambda_{\lambda x\lambda}\\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\lambda x}\\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta\lambda x}\\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma\lambda x}\end{bmatrix}\neq 0\ . \tag{5.2.40}$$

证明 我们仅讨论 $h=x^3+\lambda^2$ 情形.

容易求得

$$T(h)=T(x^3+\lambda^2)=(M^3+\langle\lambda^2\rangle)\oplus R\{x^3,\lambda\},$$

于是

$$[\mathrm{Itr}\ T(h)]^{\perp}=R\{1,x,\lambda,x^2,\lambda x\},$$

因此

$$Jg=g(0,0)+g_x(0,0)x+g_\lambda(0,0)\lambda+\frac{1}{2}g_{xx}(0,0)x^2+g_{\lambda x}(0,0)\lambda x.$$

G 是 g 的普适开折，当且仅当

$$R\{1,x,\lambda,x^2,\lambda x\}=V_g\oplus\{JG_\alpha,JG_\beta,JG_\gamma\}. \tag{5.2.41}$$

另一方面，当 $g\overset{s}{\sim}h$ 时，必有：在 $(x,\lambda)=(0,0)$ 处，

$$g=g_x=g_\lambda=g_{xx}=g_{\lambda x}=0,$$

因此

$$Jg=0,\ J(xg_x)=0,\ J(\lambda g_x)=0,\ J(\lambda g_\lambda)=0.$$

这样，在式(5.2.30)中仅有 Jg_x,Jg_λ 不为零，此时式(5.2.41)成为

$$R\{1,\ x,\lambda,x^2,\lambda x\}=R\{Jg_x,Jg_\lambda,JG_\alpha,JG_\beta,JG_\gamma\}. \tag{5.2.42}$$

式(5.2.42)成立当且仅当 $Jg_x,Jg_\lambda,JG_\alpha,JG_\beta,JG_\gamma$ 线性无关，即式(5.2.40)成立. 证毕.

5.2.4 普适开折的分岔图与保持性

设 $G(x,\lambda,\alpha)$ 是 $g(x,\lambda)$ 的普适开折，$(0,\ 0)$ 是 g 的一个奇异点，由于普适开折 G 已包含了对 g 的一切扰动，因此 G 的静态分岔图反映了当 g 受扰时可能出现的各种分岔性态. 本节我们讨论开折参数 α 对普适开折 G 的分岔图的影响，即"保持性"问题.

如果对 $\alpha\in\mathbf{R}^k$ 的一个邻域 U 中的任何 $\beta,G(\cdot,\cdot,\alpha)$ 与 $G(\cdot,\cdot,\beta)$ 都等价，从而当 $G(x,\lambda,\alpha)$ 受到小扰动时分岔图的定性性态保持不变，此时称 G 在 α 处的分岔图是持久的，即分岔是通有的；否则，称分岔图是非持久的，即分岔是退化的.

研究表明，当且仅当 α 属于下列点集之一时，$G(x,\lambda,\alpha)$ 的分岔图是非持久的.

(1)分岔点集 $B=\{\alpha\in\mathbf{R}^k$: 存在 (x,λ) 使得在 (x,λ,α) 处有 $G=G_x=G_\lambda=0\}$；

(2)滞后点集 $H=\{\alpha\in\mathbf{R}^k$: 存在 (x,λ) 使得在 (x,λ,α) 处有 $G=G_x=G_{xx}=0\}$；

(3)双极限点集 $D=\{\alpha\in\mathbf{R}^k$：存在$(x_i,\lambda)(i=1,2)$，$x_1\neq x_2$，使得在$(x_i,\lambda,\alpha)$处有

$$G=G_x=0\}.$$

这三种集合及其扰动情况如图 5.2.4 所示.

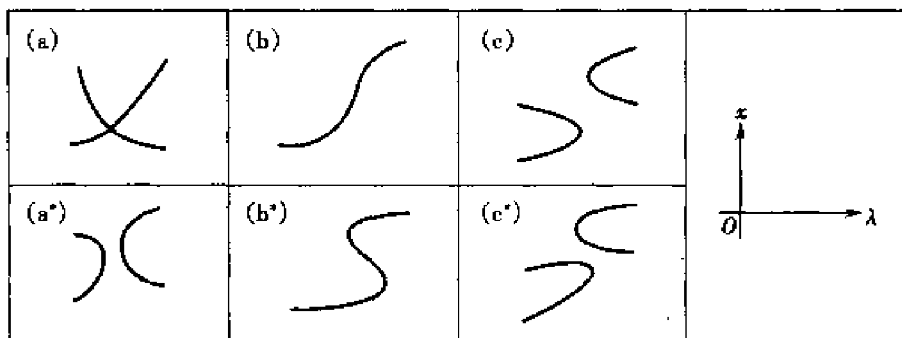


图 5.2.4　(a) 分岔点　(b)滞后点　(c)双极限点，扰动后分别为 (a*)，(b*)，(c*)

记 $\Sigma=B\cup H\cup D$，称 Σ 为转迁集(transition set). 可以证明如下定理.

定理 5.2.5　Σ 把原点的一个邻域分成若干连通分支，当 α,β 属于同一连通分支时，$G(\cdot,\cdot,\alpha)$与 $G(\cdot,\cdot,\beta)$等价.

注　转迁集 Σ 把开折参数空间 $\mathbf{R}^k$ 分成若干连通分支. 当 $\alpha\in\Sigma$ 时，$G(\cdot,\cdot,\alpha)$的分岔图不是持久的，并可按 Σ 的不同子集进一步分类，当 $\alpha\notin\Sigma$ 时，$G(\cdot,\cdot,\alpha)$的分岔图是持久的，并可按不同的连通分支分类. 这样，我们可对 g 受扰后可能出现的各种通有或退化的分岔做深入分析.

下面的定理对讨论双极限点集有用.

定理 5.2.6　设 $h(x)$是次数$\leqslant 3$ 的多项式，若 $h=h_x=0$ 有两个不同的解 x_1,x_2，则 $h\equiv 0$.

证明　利用坐标变换 $x\to x-x_1$，我们可假定 $x_1=0$. 于是 $h(0)=h_x(0)=0$，因此 $h(x)=ax^3+bx^2(a,b\in\mathbf{R})$，此时有 $h(x_2)=h_x(x_2)=0$，即

$$\begin{bmatrix} x_2^3 & x_2^2 \\ 3x_2^2 & 2x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

显然系数行列式为 $-x_2^4\neq 0$，该方程组只有零解 $a=b=0$. 证毕.

注　由定理 5.2.6 知，当 $G(x,\lambda,\alpha)$是 x 的次数$\leqslant 3$ 的非零多项式时，相应的双极限点集 $D=\varnothing$.

例 5.2.7　考虑 $g(x,\lambda)=x^3-\lambda x$，它的一个普适开折为

$$G(x,\lambda,\alpha,\beta)=x^3-\lambda x+\alpha+\beta x^2,$$

利用

$$G_x=3x^2-\lambda+2\beta x,\ G_\lambda=-x,\ G_{xx}=6x+2\beta,$$

不难求出

$$B=\{(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2:\alpha=0\}$$

$$H=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2:\alpha=\beta^3/27\right\},$$

由定理 5.2.6 知 $D=\varnothing$,转迁集 $\Sigma=B\cup H$.

下面的图 5.2.5 给出了 B 和 H 的图形,它们把参数(α,β)平面分成四个连通分支,在图上还给出了集 B,H 和各个连通分支上的开折参数(α,β)值所对应的 $G(x,\lambda,\alpha,\beta)$的分岔图.在集 B(即 β 轴)上,G 的分岔图上有跨临界点(它是分岔点);在集 H(即曲线 $\alpha=\beta^3/27$)上,G 的分岔图上有滞后点;在原点处,G 的分岔图上有叉形点(它既是分岔点,又是滞后点),由于 $D=\varnothing$,因而分岔图上没有双极限点.

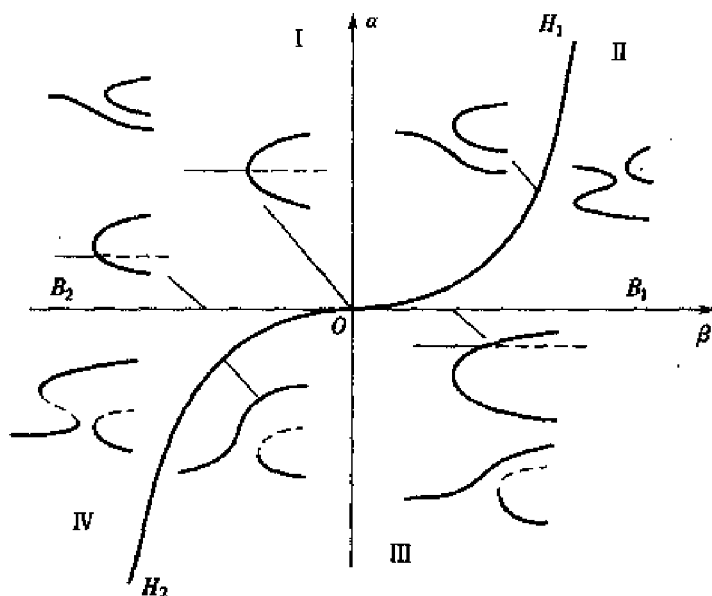


图 5.2.5

最后指出,尽管从原理上说普适开折讨论的是局部分岔性态,但有时可以通过局部结果去获知一些全局分岔的信息.

5.3 分类问题

5.3.1 初等分岔的分类

设 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$,我们来讨论如何将众多方程 $g(x,\lambda)=0$ 的静态分岔问题按定性性态进行分类.我们知道,随着 g 的余维数的增加,奇异点的退化程度增大,在 g 受到扰动时可能出现的分岔行为更复杂,因此余维数在静态分岔的分类中起着重要作用.

我们还知道,当余维数$\geqslant 4$ 时,参数空间中的转迁集及参数空间划分为若干连通分支等都难以借助几何图形表示,此时分岔行为的研究很困难,然而在实际问题中经常遇到的分岔问题大多余维数不超过 3,因此,我们有必要对余维数不超过 3 的分岔问题进行总体研究,进而对奇点类型按余维数分类.

已经证明:余维数不超过 3 的单变量分岔问题按强等价关系可以分为 11 类,我们把这 11 类分岔问题称为初等分岔问题.

定理 5.3.1 设 $g\in\varepsilon_{x,\lambda}$,$(0,0)$是 g 的奇异点,且 $\operatorname{codim} g\leqslant 3$,则 g 必与表 5.3.1 中某个 GS 范式强等价.

表 5.3.1　余维数≤3 的分岔问题的 GS 范式,普适开折及分岔图

序号	余维数	GS 范式	普适开折	分岔图 $\varepsilon=1$		分岔图 $\varepsilon=-1$		奇点类型
				$\delta=-1$	$\delta=1$	$\delta=-1$	$\delta=1$	
1	0	$\varepsilon x^2+\delta\lambda$	$\varepsilon x^2+\delta\lambda$					极限点
2	1	$\varepsilon(x^2-\lambda^2)$	$\varepsilon(x^2-\lambda^2)+\alpha$					跨临界点
3	1	$\varepsilon(x^2+\lambda^2)$	$\varepsilon(x^2+\lambda^2)+\alpha$					孤立点
4	1	$\varepsilon x^3+\delta\lambda$	$\varepsilon x^3+\delta\lambda+\alpha x$					滞后点
5	2	$\varepsilon x^2+\delta\lambda^3$	$\varepsilon x^2+\delta\lambda^3+\alpha+\beta\lambda$					非对称尖点
6	2	$\varepsilon x^3+\delta\lambda x$	$\varepsilon x^3+\delta\lambda x+\alpha+\beta x^2$					树枝分岔点
7	2	$\varepsilon x^4+\delta\lambda$	$\varepsilon x^4+\delta\lambda+\alpha x+\beta x^2$					四次折迭点
8	3	$\varepsilon x^2+\delta\lambda^4$	$\varepsilon x^2+\delta\lambda^4+\alpha+\beta\lambda+\gamma\lambda^2$					四次孤立点
9	3	$\varepsilon x^3+\delta\lambda^2$	$\varepsilon x^3+\delta\lambda^2+\alpha+\beta x+\gamma\lambda x$					双翼尖点
10	3	$\varepsilon x^4+\delta\lambda x$	$\varepsilon x^4+\delta\lambda x+\alpha+\beta\lambda+\gamma x^2$					四次跨临界点
11	3	$\varepsilon x^5+\delta\lambda$	$\varepsilon x^5+\delta\lambda+\alpha x+\beta x+\gamma x^3$					五次滞后点

图中所示的稳定性是对动态方程 $\dot{x}+g(x,\lambda)=0$ 的平衡解而言的.

5.3.2　初等分岔的识别

利用 5.3.1 的方法,不难得到 11 类初等分岔问题的普适开折的识别条件,如表 5.3.2,请读者自行验证.

表 5.3.2 初等分岔普适开折的识别条件 ($\varepsilon=\pm1,\delta=\pm1$)

GS 范式	余维数	非奇异矩阵
(1)$\varepsilon x^2+\delta\lambda$	0	—
(2),(3)$\varepsilon(x^2+\delta\lambda^2)$	1	G_α
(4)$\varepsilon x^3+\delta\lambda$	1	$\begin{bmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} \end{bmatrix}$
(5)$\varepsilon x^2+\delta\lambda^3$	2	$\begin{bmatrix} 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} \end{bmatrix}$
(6)$\varepsilon x^3+\delta\lambda x$	2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} \end{bmatrix}$
(7)$\varepsilon x^4+\delta\lambda$	2	$\begin{bmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} \end{bmatrix}$
(8)$\varepsilon x^2+\delta\lambda^4$	3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} & g_{\lambda\lambda} \\ 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} & g_{xxx} & g_{xx\lambda} & g_{x\lambda\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{xx} & 2g_{x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\lambda} & G_{\alpha\lambda\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\lambda} & G_{\beta\lambda\lambda} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\lambda} & G_{\gamma\lambda\lambda} \end{bmatrix}$
(9)$\varepsilon x^3+\delta\lambda^2$	3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xxx} & g_{xx\lambda} \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda\lambda x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & g_{\alpha\lambda x} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta\lambda x} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma\lambda x} \end{bmatrix}$
(10)$\varepsilon x^4+\delta\lambda x$	3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{xxxx} \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{bmatrix}$
(11)$\varepsilon x^5+\delta\lambda$	3	$\begin{bmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{bmatrix}$

在静态分岔研究中,奇异性理论不但是一种有效的理论方法,而且有助于对数值计算和实验结果进行深入分析,定性地提供理论指导,因此是很重要的一种数学方法.

5.4　单变量奇异性理论的应用

前面介绍了单变量静态分岔的奇异性理论,本节通过几个例子说明它的应用.

5.4.1　弹性结构系统

例 5.4.1　杆件—弹簧系统

先考虑图 5.4.1 所示的力学系统.它由两根铰接的刚性杆及扭转弹簧组成.设杆长等于 1,弹簧的弹性系数也等于 1.在点 B 处作用着水平压力 λ,取角度 x 为此系统的状态变量.设系统处于静平衡状态.该系统的势能为

$$V(x,\lambda)=\frac{x^2}{2}+2\lambda(\cos x-1), \tag{5.4.1}$$

其中第一项是弹簧的弹性势能,第二项是外力所做的功.静平衡状态由下面的方程决定:

$$\bar{g}(x,\lambda)\equiv\frac{\partial V}{\partial x}=x-2\lambda\sin x=0, \tag{5.4.2}$$

显然,

$$\bar{g}(0,\frac{1}{2})=\bar{g}_x(0,\frac{1}{2})=0,$$

故 $(x,\lambda)=(0,\frac{1}{2})$ 是 $\bar{g}$ 的一个奇异点.

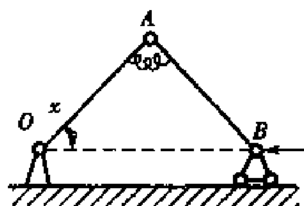


图 5.4.1

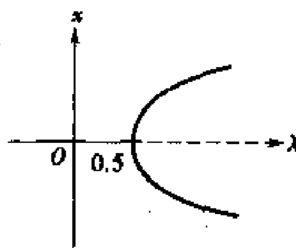


图 5.4.2

进行变换 $\mu=\lambda-1/2$,方程(5.4.2)变为

$$g(x,\mu)\equiv x-(2\mu+1)\sin x=0, \tag{5.4.3}$$

$(x,\mu)=(0,0)$ 是 g 的一个奇异点,在该点处有

$$g(0,0)=g_x(0,0)=g_{xx}(0,0)=g_\mu(0,0)=0,$$

$$g_{xxx}(0,0)=1,g_{x\mu}(0,0)=-2.$$

根据表 5.1.1 给出的识别条件,可知 $g(x,\mu)$ 与 GS 范式 $h(x,\mu)=x^3-\mu x$ 强等价.从而,在点(0, 0)处方程 $g(x,\mu)=0$ 与方程 $h(x,\mu)=0$ 有相同的分岔性态.即在该点处出现超临界叉形分岔.由于 $\lambda=\mu+\frac{1}{2}$,故 $\bar{g}(x,\lambda)=0$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 处出现超临界叉形分岔(见图 5.4.2).

再考虑上述系统的一个扰动系统(见图 5.4.3).扰动来自两方面.一方面是结构重量的影响,它可由作用在中间铰链向下的力 ϵ 表示,另一方面是弹簧的非对称性,它可由当所有外力

皆为 0 时杆系的平衡位置 $x_0=\delta$ 表示，如果弹簧是对称的，则 $\delta=0$. 我们通过附加的小参数 ε 和 δ 去描述扰动. 这个扰动系统的势能为

$$V^*(x,\lambda,\varepsilon,\delta)\equiv(x-\delta)^2/2+2\lambda(\cos x-1)+\varepsilon\sin x, \tag{5.4.4}$$

静平衡状态由下面的方程决定：

$$G^*(x,\lambda,\varepsilon,\delta)\equiv x-\delta-2\lambda\sin x+\varepsilon\cos x=0, \tag{5.4.5}$$

即

$$G(x,\mu,\varepsilon,\delta)\equiv x-\delta-(2\mu+1)\sin x+\varepsilon\cos x=0. \tag{5.4.6}$$

因为　　$G(x,\mu,0,0)=g(x,\mu)$,

所以 G 是 g 的一个 2－参数开折. 我们想知道 G 是否是 g 的一个普适开折，即 G 能否包含 g 的一切扰动. 由于 g 与 GS 范式

$$h=x^3-\mu x$$

强等价，我们当然可以根据表 5.3.2 给出的普适开折识别条件去判定. 这里不做详细计算，只从另外的角度给出一些说明.

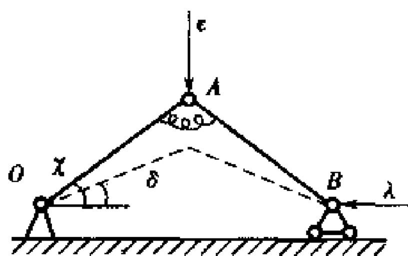


图 5.4.3

进行变换

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{6}},v=2\sqrt[3]{6}\mu,\alpha_1=\varepsilon-\delta,\alpha_2=\frac{-\varepsilon}{2\sqrt[3]{36}}, \tag{5.4.7}$$

则方程(5.4.6)可写成 Taylor 展开式：

$$H(y,v,\alpha_1,\alpha_2)\equiv y^3-vy+\alpha_1+\alpha_2y^2+\cdots=0. \tag{5.4.8}$$

如果略去高阶项，式(5.4.8)给出 $h(y,v)=y^3-vy$ 的一个普适开折. 由于式(5.4.7)是微分同胚，它把 $h(y,v)$ 和 $H(y,v,\alpha_1,\alpha_2)$ 分别变为 $g(x,\mu)$ 和 $G(x,\mu,\varepsilon,\delta)$，因此 $G(x,\mu,\varepsilon,\delta)$ 应当是 $g(x,\mu)$ 的普适开折. 若取组合参数 α_1,α_2，则 $g(x,\mu)$ 的奇异点(0, 0)受扰后可能出现的各种分岔图以及转迁集的情况可见图 5.2.5. 我们还可以通过变换(5.4.7)得到在原参数(ε,δ)平面上的转迁集.

例 5.4.2　压杆屈曲.

考虑一根等截面的弹性细直杆，它的端部受到压力 P. 当 P 较小时，杆件处于单纯压缩状态，无横向变形. 但当 P 大于某个临界值时，杆件发生弯曲，存在横向变形，这种现象即为屈曲，或失稳.

设杆的长度为 l，屈曲在(x,y)平面上发生，且屈曲不改变杆长. 用 s 表示从原点 O 起沿杆的弧长，$0\leqslant s\leqslant l$，$u(s)$表示变形杆的切线与 x 轴之间的夹角(见图 5.4.4)，$y(s)$表示变形杆的横向位移. 杆的弯矩平衡方程为

$$EIu'=-Py \tag{5.4.9}$$

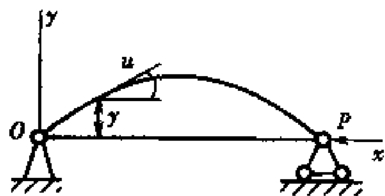


图 5.4.4

其中 E 为杨氏弹性模量，I 为截面惯性矩，u'表示 u 对 s 的导数. 考虑到 $y'=\sin u$，并记 $\lambda=\dfrac{P}{EI}$，可得方程

$$-u''-\lambda\sin u=0,0\leqslant s\leqslant l, \tag{5.4.10}$$

又设杆的两端铰接，于是有边界条件

$$u'(0)=u'(l)=0. \tag{5.4.11}$$

记 $C^0[0,l]$ 为 $[0,l]$ 上连续实函数全体，并引入范数

$$\| x \|_0=\max_{0\leqslant s\leqslant l}|x(s)|,$$

记 $C^k[0,l]$ 为 $[0,l]$ 上有直到 k 阶连续导数($k\geqslant 1$)的实函数全体，并引入范数

$$\| x \|_k=\max\{\| x \|_0,\| x' \|_0,\cdots,\| x^{(k)} \|_0\}.$$

取 Banach 空间

$$X=\{u\in C^2[0,l]:u'(0)=u'(l)=0\},Y=C^0[0,l],$$

定义映射

$$F:X\times\mathbf{R}\to Y$$

为

$$F(u,\lambda)=-u''-\lambda\sin u,$$

则直杆的平衡问题(5.4.10)(5.4.11)就是求解非线性方程

$$F(u,\lambda)=0,(u,\lambda)\in X\times\mathbf{R}. \tag{5.4.12}$$

显然，方程(5.4.12)对任何 $\lambda\in\mathbf{R}$ 都有平凡解 $u=0$，它对应杆的无屈曲状态，我们称 $u=0$ 为基本解. 杆的屈曲状态对应方程(5.4.12)的非平凡解 $u\neq 0$. 因此，杆的屈曲问题就是研究从方程(5.4.12)的基本解分岔出非平凡解的静态分岔问题.

取杆长 $l=\pi$，利用 LS 方法，Banach 空间中的非线性方程(5.4.12)在奇异点 $(u,\lambda)=(0,1)$ 附近的分岔问题可约化为一维分岔方程

$$g(x,\lambda)=0. \tag{5.4.13}$$

由于我们无法得到方程(5.4.13)的具体表达式，因此不能直接对(5.4.13)进行分岔分析. 然而，我们可以用奇异性方法去进行定性分析. 首先根据奇异性的识别理论去研究奇异点(0, 1)的分岔性态. 为此，利用函数 F 的导数去计算 g 的一些导数. 注意到这里的函数 $F(u,\lambda)$ 是 u 的奇函数，即 $F(-u,\lambda)=-F(u,\lambda)$，此时 g 的导数计算可大大简化. 在奇异点(0, 1)处有下面的结果：

(1) $g=g_x=g_{xx}=g_\lambda=0$;

(2) $g_{xxx}=\langle u_1^*,D^3F(u_1,u_1,u_1)\rangle$.

由于

$$\mathcal{R}(L)^\perp=\mathcal{N}(L),$$

所以

$$u_1^*=u_1=\cos s.$$

此外，考虑到

$$\begin{aligned}D^3F(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|_{(0,1)}&=\frac{\partial^3}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}[(t_1\xi_1''+t_2\xi_2''+t_3\xi_3''\\&\quad+\sin(t_1\xi_1+t_2\xi_2+t_3\xi_3)]|_{t_1=t_2=t_3=0}\\&=\xi_1\xi_2\xi_3\cos 0=\xi_1\xi_2\xi_3,\end{aligned}$$

故有

$$g_{xxx}=\langle\cos s,\cos^3 s\rangle=\int_0^\pi\cos^4 s\,\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{8}>0.$$

(3) $g_{x\lambda} = \langle u_1^*, (\mathrm{DF}_\lambda)\cdot u_1 \rangle$.

考虑到

$$F_\lambda = -\sin u, (\mathrm{DF}_\lambda)\cdot u_1 |_{(0,1)} = -u_1 = -\cos s,$$

故有

$$g_{x\lambda} = \langle \cos s, -\cos s \rangle = -\int_0^\pi \cos^2 s \, ds = -\frac{\pi}{2} < 0.$$

由表 5.1.1 知道, $g(x,\lambda)$在奇异点(0, 1)附近强等价于 GS 范式

$$h(x,\lambda) = x^3 - (\lambda - 1)x,$$

因此约化方程(5.4.13)在(0, 1)处出现超临界叉形分岔,从而原方程(5.4.12)在$(u,\lambda)=(0, 1)$处也有同样的分岔性态.这个结论与由精确解得到的结果一致(参见[20]).

实际的杆件往往有某些缺陷,如微小的原始弯曲、材料的非对称性、砂眼等,它们可以看作是对弹性杆件系统的扰动. 我们能够利用普适开折理论去探讨有缺陷的压杆的一切可能的屈曲状态.

5.4.2 化学反应器系统

现在讨论 CSTR(连续搅拌罐式反应器)的静态分岔问题(参见[20]).该系统的平衡态(y,θ)满足静态方程

$$\begin{cases} \lambda y - D(1-y)E(\theta) = 0, \\ \lambda\theta - \beta_1 D(1-y)E(\theta) + \beta D(\theta - \theta_c) = 0, \end{cases} \tag{5.4.14}$$

其中 $y = (C_f - C)/C$ 是无量纲反应物浓度, $\theta = \gamma(T - T_f)/T_f$ 是无量纲反应物温度,而 γ, β_1 和 β 分别为无量纲活化能、反应热和热交换系数, $\theta_c = \gamma(T_c - T_f)/T_f$ 是无量纲冷却剂温度, D 是 Damkohler 数, $E(\theta) = \exp[\theta(1+\theta/\gamma)^{-1}]$, λ 是一部分反应物所占比例. 从第一式中解出 y 并代入第二式,令 $x = \theta/\gamma$,则有

$$G(x,\mu,\alpha,\beta,\eta) \equiv (1+\mu)x - \eta - \frac{\alpha\mu}{1+\beta\mu A(x)} = 0, \tag{5.4.15}$$

其中

$$A(x) = \exp[-\gamma x/(1+x)],$$

$$\mu = \lambda/(\beta D), \eta = \theta_c/\gamma, \alpha = \beta_1/\gamma,$$

γ 为常数,并要求 $x > 0$.

首先指出,对 $\gamma > 8/3$,存在唯一的一组数 $z_0 = (x_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \eta_0)$,使得在$(x_0, \mu_0)$处 $g(x,\mu) \equiv G(x,\mu,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$有一个双翼尖点. 为此,我们证明关于 x,μ,α,β,η 的方程组

$$G = G_x = G_{xx} = G_\mu = G_{x\mu} = 0 \tag{5.4.16}$$

有唯一的解 $z_0 = (x_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \eta_0)$,使得在该处有 $G_{xxx} > 0$ 和 $G_{\mu\mu} > 0$. 记 $\Delta = 1 + \beta\mu A(x)$. 容易求得下列结果:

$$G = (1+\mu)x - \eta - \alpha\mu/\Delta;$$

$$G_\mu = x - \alpha/\Delta^2;$$

$$G_x=(1+\mu)+\alpha\beta\mu^2A'(x)/\Delta^2;$$

$$G_{x\mu}=1+2\alpha\beta\mu A'(x)/\Delta^3;$$

$$G_{xx}=\alpha\beta\mu^2[A''(x)/\Delta^2-2\beta\mu(A'(x))^2/\Delta^3].$$

此外,对 $x>-1,\gamma>0$,有

$$A(x)=\exp[-\gamma x/(1+x)]>0;$$

$$A'(x)=-\gamma A(x)/(1+x)^2<0;$$

$$A''(x)=[\gamma^2+2\gamma(1+x)]A(x)/(1+x)^4>0.$$

由式(5.4.16)的第四式求得

$$\alpha=x\Delta^2 \tag{5.4.17}$$

代入式(5.4.16)的第五式,并利用 Δ 的表达式得

$$\beta\mu(A+2xA')=-1. \tag{5.4.18}$$

再由式(5.4.16)的第三式得

$$\beta\mu(2A'^2-AA'')=A''. \tag{5.4.19}$$

由式(5.4.18)和式(5.4.19)得到

$$A'+xA''=0, \tag{5.4.20}$$

即

$$x^2+\gamma x-1=0. \tag{5.4.21}$$

当 $\gamma>0$ 时,式(5.4.21)有唯一的解 x_0,满足 $x_0>0$.

把式(5.4.17)代入式(5.4.16)的第二式得

$$\beta\mu xA'=-\frac{1+\mu}{\mu}, \tag{5.4.22}$$

将式(5.4.18)与式(5.4.22)相除,并令 $x=x_0$ 得

$$\mu_0=-\frac{A(x_0)+2x_0A'(x_0)}{A(x_0)+x_0A'(x_0)}, \tag{5.4.23}$$

代入式(5.4.18)得

$$\beta_0=\frac{A(x_0)+x_0A'(x_0)}{[A(x_0)+2x_0A'(x_0)]^2}. \tag{5.4.24}$$

在式(5.4.17)中,令 $x=x_0$ 得

$$\alpha_0=x_0[1+\beta_0\mu_0A(x_0)]^2. \tag{5.4.25}$$

最后把上面结果代入式(5.4.16)的第一式,则有

$$\eta_0=(1+\mu_0)x_0-\alpha_0\mu_0/(1+\beta_0\mu_0A(x_0)). \tag{5.4.26}$$

这样便得到唯一解 $z_0=(x_0,\mu_0,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$.

记 $\Delta_0=1+\beta_0\mu_0A(x_0)$,容易计算在 z_0 处有

$$G_{\mu\mu}|_{z_0}=\frac{2\alpha_0\beta_0A(x_0)}{\Delta_0^3}>0, \tag{5.4.27}$$

这是因为当 $\gamma>8/3$ 时,可证 $\alpha_0,\beta_0,\mu_0,A(x_0)$和 Δ_0 都大于 0. 此外,在 z_0 处还有

$$G_{xxx}|_{z_0}=\frac{\alpha_0\beta_0\mu_0^2[\Delta_0A'''(x_0)-3\beta_0\mu_0A'(x_0)A''(x_0)]}{\Delta_0^3}>0, \tag{5.4.28}$$

这里用到在该处 $G_{xx}=0$ 的条件.故据表 5.1.1 的识别条件,$g(x,\mu)\equiv G(x,\mu,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$在奇异点$(x_0,\mu_0)$附近与 $h(x,\mu)=x^3+\mu^2$ 强等价.

我们把 $G(x,\mu,\alpha,\beta,\mu)$作为 $g(x,\mu)$在(x_0,μ_0)附近的 3-参数开折,现在证明 G 是 g 的一个普适开折. 根据表 5.3.2 的普适开折识别条件,只需证明(注意到在 z_0 处 $G_{x\mu}$ 等于 0)矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & G_{xxx} & G_{xx\mu}\\ 0 & 0 & G_{\mu\mu} & G_{\mu xx} & G_{\mu\mu x}\\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x}\\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x}\\ G_\eta & G_{\eta x} & G_{\eta\mu} & G_{\eta xx} & G_{\eta\mu x}\end{bmatrix} \tag{5.4.29}$$

在 z_0 处的行列式不等于 0.在 B 的第 5 行中,除 $G_\eta=-1$ 外,其他元素均为 0,故

$$\det B=-\det\begin{bmatrix}0 & 0 & G_{xxx} & G_{xx\mu}\\ 0 & G_{\mu\mu} & G_{\mu xx} & G_{\mu\mu x}\\ G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x}\\ G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x}\end{bmatrix}. \tag{5.4.30}$$

容易计算,在式(5.4.30)的第 2 行和第 4 行的元素中成立

$$\frac{G_{\mu\mu}}{G_{\beta\mu}}=\frac{G_{\mu xx}}{G_{\beta xx}}=\frac{G_{\mu\mu x}}{G_{\beta\mu x}}=\frac{\beta}{\mu}, \tag{5.4.31}$$

把式(5.4.30)的第 2 行乘以 $-\mu/\beta$,再加到第 4 行,就可使第 4 行的后三个元素变为 0,从而

$$\det B=G_{\beta x}\det\begin{bmatrix}0 & G_{xxx} & G_{xx\mu}\\ G_{\mu\mu} & G_{\mu xx} & G_{\mu\mu x}\\ G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x}\end{bmatrix}. \tag{5.4.32}$$

考虑到

$$G_{\beta x}=\alpha\mu^2[1-\beta\mu A(x)]A'(x)/\Delta^3,$$

利用前面的结果可知

$$G_{\beta x}|_{z_0}\neq 0.$$

再证明式(5.4.32)中的行列式不为 0.注意到在 z_0 处有

$$G_{\alpha xx}|_{z_0}=\alpha_0^{-1}G_{xx}|_{z_0}=0, \tag{5.4.33}$$

因此该行列式等于

$$G_{xxx}(G_{\mu\mu x}G_{\alpha\mu}-G_{\mu\mu}G_{\alpha x\mu})-G_{xx\mu}^2G_{\alpha\mu}. \tag{5.4.34}$$

容易计算 G 的其他几个导数:

$$G_{\alpha\mu}=-1/\Delta^2,$$

$$G_{\alpha\mu x}=2\beta\mu A'(x)/\Delta^3,$$

$$G_{\mu\mu x}=2\alpha\beta[1-2\beta\mu A(x)]A'(x)/\Delta^4. \tag{5.4.35}$$

因为 $G_{\alpha\mu}|_{z_0}<0$,再由式(5.4.27)得

$$(G_{\mu\mu x}G_{\alpha\mu}-G_{\mu\mu}G_{\alpha\mu x})|_{z_0}=-2\alpha_0\beta_0A'(x_0)/\Delta_0^6>0,$$

由式(5.4.28)知 $G_{xxx}|_{z_0}>0$,所以,在 z_0 处该行列式大于 0.

综合上述结果便有

$$\det B|_{z_0}\neq 0.$$

由于 $g(x,\mu)$在(x_0,μ_0)附近与 $h(x,\mu)=x^3+\mu^2$ 强等价,它们的普适开折就有相应的持久分岔图.图 5.4.5 给出在$(x_0,\mu_0,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$附近 $G(x,\mu,\alpha,\beta,\eta)$的主要分岔图类型:其中(Ⅰ)是对 $g(x,\mu)=G(x,\mu,\alpha_0,\beta_0,\eta_0)$给出的双翼尖点分岔图,而(Ⅱ)~(Ⅷ)是 7 种持久分岔图.它们描述了 CSTR 系统的平衡态可能出现的主要静态分岔性态.

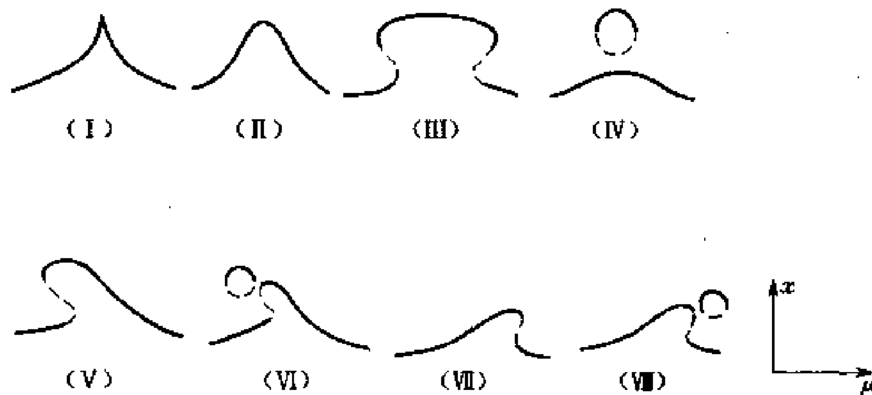


图 5.4.5

第6章 混沌

混沌是近二十年来新兴的一个学科分支,它的基本理论和方法在许多领域有着广泛的应用.混沌的研究已成为动力系统的中心内容之一.

6.1 什么是混沌

虽然有关混沌的论著已经很多了,但人们常会从不同的角度来理解和定义混沌.例如,有人定义混沌是某些确定性系统的随机性过程,另有人定义混沌是某些非线性动力系统具有的一种特定性质,即当初始条件无论多微小地改变,都可能使解的长期性态有显著的差异,相应地,就有所谓"混沌解"和"系统的混沌性质就是系统的解对初值具有敏感的依赖性"等等说法.

Moon 和 Holmes(见[39])于 1979 年 证明了受迫 Duffing 方程

$$\ddot{x}+\delta\dot{x}-x+x^3=\gamma\cos\omega t$$

在一定的参数 γ 取值范围会产生混沌性态.

这个方程提供了两个永磁体之间非均匀磁场中悬垂杆的受迫振动的数学模型.由于外力的周期性,上述方程可重写为一个自治系统:

$$(P_\gamma)\qquad \begin{cases}\dot{u}=v,\\ \dot{v}=u-u^3-\delta v+\gamma\cos\omega\theta, \qquad (u,v,\theta)\in\mathbf{R}^2\times S^1,\\ \dot{\theta}=1,\end{cases}$$

这里 $S^1=\mathbf{R}/T$, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$,并设 $\delta>0$, ω 为常数.采用截面 $\Sigma=\{u,v,\theta\,|\,\theta=0\}$和相应的庞卡莱映射,Ueda 研究出下述结果(参见 [49]):当 $\gamma>0$ 较小时,系统具有两个吸引的周期 T 轨道和一个"鞍型"的(在一个方向具有吸引性而在另一个方向具有排斥性的)周期 T 轨道,它们分别可看作由 $\gamma=0$ 时原系统所具有的两个汇(±1, 0)和一个鞍点(0,0)产生出来.当 γ 逐渐增大,至某值 γ_1,每个周期 T 轨道会分岔出两个周期 $2T$ 的轨道,继续增大 γ 值,系统会相继分岔出周期 $4T,\cdots,2^nT,\cdots$的闭轨,这被称为倍周期分岔.相应的分岔值 $\gamma_2,\cdots,\gamma_n,\cdots$以某个值 γ_∞ 为极限,在 $\gamma=\gamma_\infty$ 系统突然出现从周期轨道向非周期的随机性轨道的转化.这种随机性轨道就是所谓的混沌解.当 γ 进一步增大,系统又会再出现周期性轨道和逐次分岔的情况.

这一类逐次倍周期分岔被深入地研究,并从中发现了一些有趣的普适性质.例如,1963 年 Lorenz 研究两无限平面间流体在下层受热时的运动所得出的简化了的运动方程,即著名的 Lorenz 系统:

$$\begin{cases}\dot{x}=-\sigma x+\sigma y,\\ \dot{y}=-\rho x-y-xz,\\ \dot{z}=-\beta z+xy,\end{cases}$$

在 $\sigma=10$, $\beta=8/3$ 而视 ρ 为参数时,也会有类似的"倍周期分岔通向混沌"的性态,更有甚者,

倍周期分岔发生时的参数值 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n,\cdots$ 及上例中的 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n,\cdots$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\rho_{n-1}-\rho_n}{\rho_n-\rho_{n+1}}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\gamma_{n-1}-\gamma_n}{\gamma_n-\gamma_{n+1}}$ 同为一常数 $\delta\approx 4.699\,201\,609\,102\,99$(参见[47]).此常数 δ 称为 Feigenbaum 普适常数,它由 Feigenbaum(参见[18])就一类非线性变换首先提出.现在,考查一个系统是否有此类普适常数已成为动力系统研究中的一个重要课题.

上面所述给出了从倍周期分岔导致混沌的这一途径,事实上还有其他通向混沌的途径,例如拟周期吸引子失稳而直接进入混沌等等(参见[24]).

进一步的数值研究还证明了在上述两个例子里,当参数取适当值时,系统不仅具有所谓混沌解,并且在相空间存在一个集合,它包含了这种解的带"随机性"的轨线,系统的解对此集合里的初值具有所谓的敏感的依赖性.同时,此集合对其附近的轨线具有吸引性,并且在几何上呈现出分形结构,即具有无穷层次的自相似性结构(见第7章),于是这个集合被称为"奇怪吸引子"或"混沌吸引子".综上所述,人们要研究什么是混沌,混沌是怎样产生的,以及在混沌的状态和产生混沌的过程中有哪些与具体方程无关与相空间维数无关的普适性规律,等等.此外,为了应用,混沌控制的研究已成为热点之一(参见[16]).

为了简明起见,我们在下面给出数学物理界大多数人所认同的混沌动力系统的有关定义,并在后面主要就一维的离散动力系统来讨论.

定义 6.1.1 动力系统 $\Phi_t:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $t\in\Lambda$, $\Lambda=[0,+\infty)$(或 $\mathbf{Z}_+$)称为在集 $A\subset\mathbf{R}^n$ 上是混沌的,也称为在 A 上有对初值的敏感的依赖性,是指存在 $\varepsilon_0>0$,使得 $\forall x\in A$ 和 $\varepsilon>0$, $\exists y\in A\cap B(x;\varepsilon)$ 和 $t\in\Lambda$,满足 $|\Phi_t(x)-\Phi_t(y)|\geqslant\varepsilon_0$.这时也称 A 是动力系统 Φ_t 的混沌集.当动力系统 $\Phi_t:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 具有 n 维 Lebesgue 测度非零的混沌集,则称 Φ_t 为一个混沌动力系统.

定义 6.1.2 若 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是动力系统 $\Phi_t:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $t\in\Lambda$ 的不变集,且是 Φ_t 的混沌集,则称 A 是动力系统 Φ_t 的混沌不变集.若进一步,A 又是 Φ_t 的吸引集(吸引子),则称 A 为动力系统 Φ_t 的混沌吸引集(混沌吸引子,也称为奇怪吸引子).

在有些场合,人们称动力系统在集 A 上混沌,还意味着 A 中有系统的任意周期的周期点且它们在 A 中稠密,并且 A 中有一个非周期的轨道在其中稠密等.在后面的一些例子里,我们可看到这些情形.

6.2 逻辑斯蒂(Logistic)映射

对于在一定范围内繁殖的昆虫数量可建立数学模型,从中得出所谓逻辑斯蒂(logistic)方程:$\dot{x}=x(\alpha-\beta x)$,或相应的逻辑斯蒂映射

$$x_{n+1}=\alpha x_n-\beta x_n^2,$$

后者通过适当的坐标变换可化为

$$x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n).$$

这是一个[0,1]上的含参数 μ 的单边离散动力系统 $\{G_\mu^n\}$,其中

$$G_\mu(x)=\mu x(1-x),\ x\in[0,1]. \tag{6.2.1}$$

我们先讨论 $\mu\in(0,4]$ 的情形.回顾一下离散动力系统周期轨道稳定性的概念:设一维映

射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 以 $\{x_0,\cdots,x_{n-1}\}$ 为周期 n 轨道. 若 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^n(x_0)\right|<1$, 则此轨道称为稳定的或吸引的; 若 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^n(x_0)\right|>1$, 则称其为不稳定的或排斥的.

注意周期 1 轨道即不动点, 且因 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^n(x_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^n(x_i)$, $i=1,2,\cdots,n-1$, 周期 n 点 x_i $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 都具有相同的稳定性. 同时, 周期 n 点 x_0 由稳定过渡为不稳定的临界情形是

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^n(x_0)\right|=1. \tag{6.2.2}$$

对于 $G_\mu(x)$, 非零的不动点 $\bar{x}$ 为 $(\mu-1)/\mu$, 据临界条件(6.2.2)可解得 $\mu_1=3$ 时, $\bar{x}$ 由稳定过渡到不稳定, 这时出现分岔. 当 μ 比 3 稍大, 即 $3<\mu<1+\sqrt{6}$, G_μ 有两个稳定的周期 2 点, 而没有非零的稳定的周期 1 点. 这两个周期 2 点可由计算容易得出, 也可通过 G_μ^2 的函数图像与分角线 $y=x$ 的交点得出.

通过周期 2 点稳定性临界条件可得参数临界值为 3 和 $\mu_2=1+\sqrt{6}$. 所以稳定的周期 2 点只能在 $\mu\in(3,1+\sqrt{6})$ 时出现. 当 $\mu>\mu_2$, 周期 2 点也不稳定了, 出现了四个稳定的周期 4 点, …, 总之, 计算结果表明, 随 μ 增大, G_μ 出现了倍周期分岔现象, 并且分岔值有一个极限值 $\mu_\infty=3.569\ 945\ 672$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}$ 就是前面提到的 Feigenbaum 常数. 此外, 倍周期分岔时两相邻周期轨道之间的距离值也是收敛的, 而且, 比如说(参见图 6.2.1), 在点 $x=\frac{1}{2}$ 附近的周期轨道分岔前后离开该点的距离之比趋于一个常数, 它也是一个普适常数:

$$\frac{d_n}{d_{n+1}}\to\alpha\approx2.502\ 907\ 875.$$

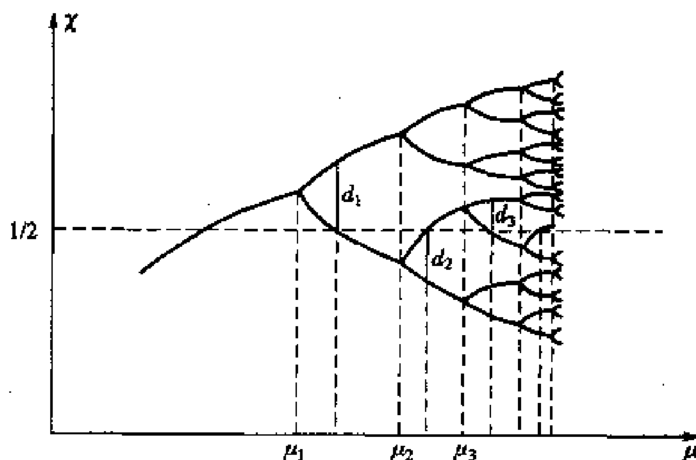


图 6.2.1

当 $\mu=\mu_\infty$ 时系统出现非周期解. 事实上, 计算表明, $\mu\in[\mu_\infty,4]$ 时, 系统发生混沌现象. 下表列出了 $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$ 的部分数值计算结果, 它表明了运动的随机性和对于初值的敏感依赖性.

表 6.2.1　$x \to 4x(1-x)$对初值的敏感依赖性

n	由 $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$确定 x_{n+1}		
0	$x_0=0.1$	$x_0=0.100\,000\,01$	$x_0=0.100\,000\,1$
1	0.36	0.360 000 003 2	0.360 000 032 0
2	0.921 6	0.921 600 035 8	0.921 600 358 4
3	0.289 013 76	0.289 013 639 1	0.289 012 551 2
…	…	…	…
10	0.147 836 559 9	0.147 824 444 9	0.147 715 428 1
…	…	…	…
50	0.277 569 081 0	0.435 057 399 7	0.973 249 588 2
51	0.802 094 386 2	0.983 129 834 6	0.104 139 309 1
52	0.634 955 927 4	0.066 342 251 5	0.373 177 253 6
…	…	…	…

为进一步分析研究上述一维映射倍周期分岔导向混沌的现象,人们用计算机计算对应于参数 μ 的系统的周期点 x 的值.在迭代运算时,去掉与初始值有关的开始 500 次的显示,并适当选取参数 μ 的增量(即步长)而用 μ 为横坐标,用迭代次数 500 以上直到 5 000 的所得值为纵坐标作图(图 6.2.2),就可得出下列图形,其中第二个图形是第一个图形的一个局部放大.

由图可见,$\mu<\mu_\infty$时,随 μ 值增大,依次出现 2^n 周期分岔,当 $\mu \geqslant \mu_\infty$,情况完全不同,x 取值是随机的,即出现混沌.从图还可见,"混沌区"并非混乱一片,从右向左,x 取值可分为 2^n 个带,$n=0,1,2,3,\cdots$.图中以 nP 表示周期 n 点,nI 表示混沌区内 x 取值所分成的 2^n 个带,μ_∞ 是它们分别从两边相向收敛的共同极限.

进一步,把 x 和参数 μ 的尺度放大,还可以发现,在混沌区还存在许多周期"窗口",即几乎空白的竖条,如 $\mu=3.83$ 附近的 $3P$ 窗口.$3P$ 向左依次还有 $5P,7P,9P$ 等窗口.在 $2I$ 带内则依次有 $6P,10P,14P$ 等窗口,在 $4I$ 带内则依次有 $12P,20P,28P$ 等窗口,如此等等.

上述结果印证了 Sarkovskii(参见[44])的一个著名定理:对于正整数的下述排序:

$$3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd 9 \lhd \cdots \lhd 2\times3 \lhd 2\times5 \lhd 2\times7 \lhd 2\times9 \lhd \cdots \lhd 2^2\times3 \lhd 2^2\times5 \lhd 2^2\times7 \lhd 2^2\times9 \lhd$$
$$\cdots \lhd 2^n\times3 \lhd 2^n\times5 \lhd 2^n\times7 \lhd 2^n\times9 \lhd \cdots \lhd 2^m \lhd 2^{m-1} \lhd \cdots \lhd 2^4 \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1,$$

若 $\mathbf{R}$ 上连续映射 f 具有一个周期 p 轨道而 $p \lhd q$,则 f 必有周期 q 轨道.

根据这个定理,若 f 有周期 p 轨道而 $p \neq 2^n$,则 f 有周期 2^n 轨道.特别,若 f 有周期 3 轨道,则 f 必有一切周期 n 轨道,$n \in \mathbf{N}$.进一步还有下述著名的定理.

定理 6.2.1(Li-Yorke 定理(参见[31]))　设 $J \subset \mathbf{R}$ 是一个区间,$f: J \to J$ 连续.设有一点 $a \in J$,使 $b=f(a)$,$c=f^2(a)$和 $d=f^3(a)$,满足 $d \leqslant a<b<c$ 或者 $d \geqslant a>b>c$,则

(1) $\forall\, n \in \mathbf{N}$,$f$ 在 J 中有周期 n 点;

(2)存在一个不可数集 $S \subset J$,S 中不含 f 的周期点,并且存在常数 $\delta>0$,使得

(i)对每两个点 $p,q \in S$,$p \neq q$,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|f^n(p)-f^n(q)| \geqslant \delta,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,|f^n(p)-f^n(q)|=0,$$

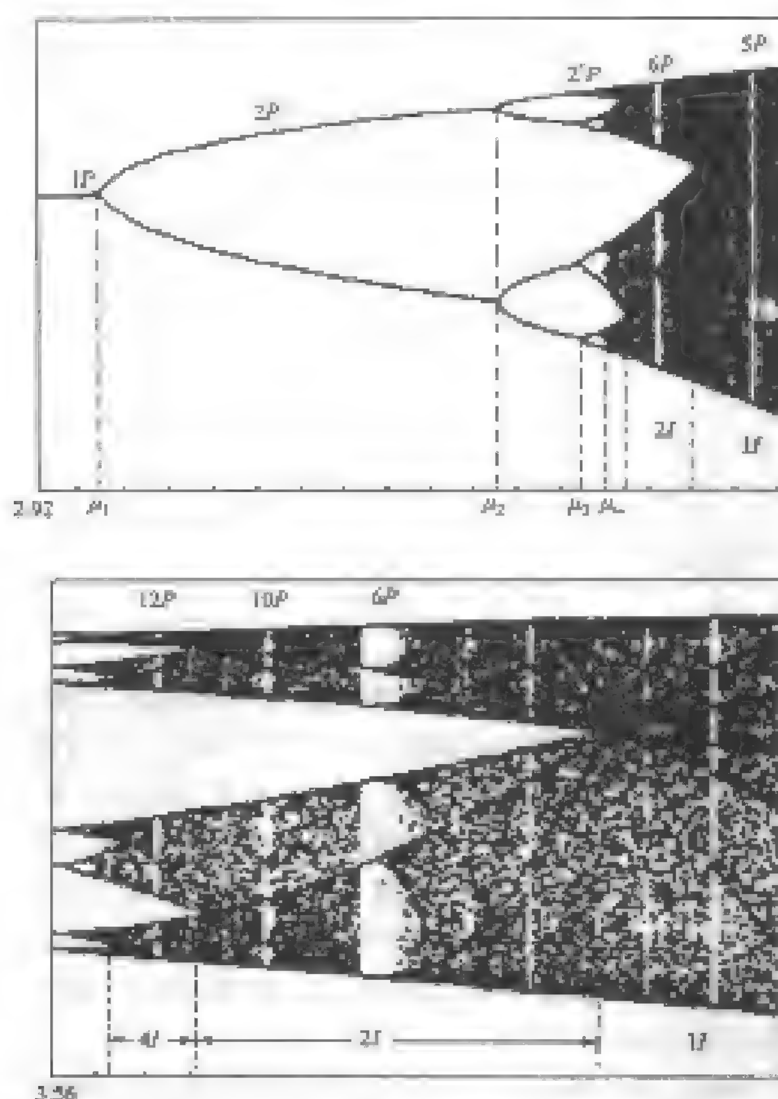


图 6.2.2

(ii)对每个 $p \in S$ 及周期点 $q \in J$,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f^n(p)-f^n(q)| \geqslant \delta.$$

这个定理表示了"周期 3 蕴含着混沌"这一说法的实际含义.

6.3 单边符号动力系统

现在我们将建立一种符号动力系统,它使我们能把一些动力系统的各种性态特别是混沌性态看得很清楚.

我们先引进集合 $\Sigma=\{(s_0s_1s_2\cdots): s_i\in\{0,1\}, i\in \mathbf{Z}_+\}$,即 Σ 的元素是一些符号列 $(s_0s_1s_2\cdots)$,再在 Σ 上建立距离 $d:\Sigma\times\Sigma\to\mathbf{R}$,其定义为

$$d(s,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|s_k-t_k|}{2^k}, \forall s=(s_0s_1\cdots), t=(t_0t_1t_2\cdots)\in\Sigma.$$

容易验证，d 是 Σ 上的距离，即 Σ 成为一个距离空间. 在 Σ 上可建立左移映射 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$，使得

$$\sigma(s_0s_1s_2\cdots)=(s_1s_2s_3\cdots),\ \forall (s_0s_1s_2\cdots)\in\Sigma,$$

称 $\{\sigma^k\}_{k\in Z_+}:\Sigma\to\Sigma$ 为单边符号动力系统.

为了对此系统有更好的了解，我们需要下面的命题.

命题 6.3.1　(1) 设 $t,s\in\Sigma$，$t=(t_0t_1t_2\cdots)$，$s=(s_0s_1s_2\cdots)$，若 $t_k=s_k$，$k=0,\cdots,n$，则 $d(s,t)\leqslant 1/2^n$；反之，若 $d(s,t)<1/2^n$，则 $t_k=s_k$，$k=0,\cdots,n$.

(2) 左移映射 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ 是连续的.

证明　(1) 若 $s_k=t_k$，$k\leqslant n$，则

$$d(s,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|s_k-t_k|}{2^k}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|s_k-t_k|}{2^k}\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n};$$

另一方面，若 $d(s,t)<1/2^n$，且存在 $k\leqslant n$ 使 $s_k\neq t_k$，则有

$$\frac{1}{2^n}>d(s,t)\geqslant\frac{|s_k-t_k|}{2^k}=\frac{1}{2^k}\geqslant\frac{1}{2^n},$$

这是矛盾.

(2) 对任意 $\varepsilon>0$ 和 $s=(s_0s_1s_2\cdots)\in\Sigma$，取 $\delta=1/2^{n+1}$，其中 n 满足 $1/2^n<\varepsilon$，故若 $t=(t_0t_1t_2\cdots)\in\Sigma$ 适合 $d(s,t)<\delta=1/2^{n+1}$，则由 (1) 得 $s_k=t_k$，$k\leqslant n+1$，从而有

$$d(\sigma(t),\sigma(s))\leqslant 1/2^n<\varepsilon,$$

即 σ 是连续的. 证毕.

现在我们希望用左移映射 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ 来刻画逻辑斯蒂映射 $F_a(x)=ax(1-x)$，$a>4$. 参见图 6.3.1. 我们感兴趣的是给出 F_a 的混沌不变集以及 F_a 在此集上的性态.

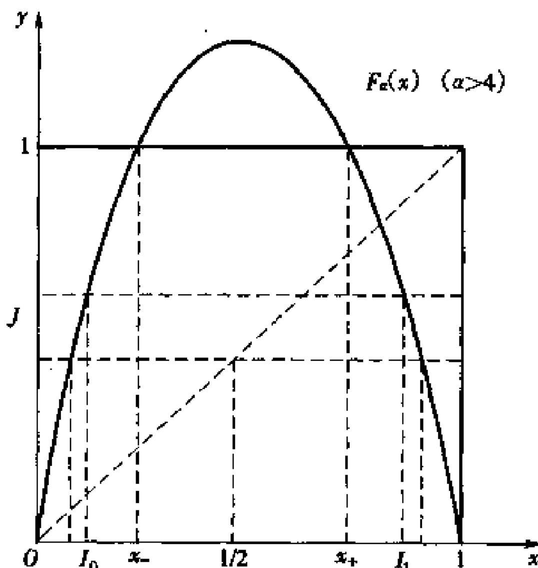


图 6.3.1

容易得出

$$|F_a^k(x)|\to\infty(k\to\infty),\ \forall x\in(-\infty,0)\cup(x_-,x_+)\cup(1,+\infty),\tag{6.3.1}$$

这里 $x_\pm=(1/2)(1\pm\sqrt{1-4/a})$.

记 $I_0=[0,x_-]$，$I_1=[x_+,1]$（见图 6.3.1），则 F_a 的不变集必然在 $I_0\cup I_1$ 中. 事实上根据式 (6.3.1)，不难看到 F_a 的不变集为

$$\begin{aligned}A&=\{x\in I_0\cup I_1:F_a^n(x)\in I_0\cup I_1,\ \forall n\in\mathbf{N}\}\\&=\{x:F_a^n(x)\in[0,1],\ \forall n\in\mathbf{N}\},\end{aligned}$$

亦即

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_a^{-n}([0,1]).$$

对比一下 Cantor 三分集的构造，不难看出 A 的构造几乎是一样的，只不过这里不是对区间进行三等分.

下面建立映射 $T:A\to\Sigma$ 如下：对于任一 $x\in A$，$T(x)=(s_0s_1\cdots s_n\cdots)\in\Sigma$，其中

$$s_n=\begin{cases}1, & 若 F_a^n(x)\in I_1,\\ 0, & 若 F_a^n(x)\in I_0,\end{cases}\qquad n=0,1,2,\cdots(F_a^0(x)=x).$$

定理 6.3.1 $T:A\to\Sigma$ 是同胚.

证明 首先,我们证明 A 中不同点的像是不相同的.事实上,任取 $x,y\in A,x<y$,若有 $T(x)=T(y)$,则对于任意 $n\geqslant 0$,$F_a^n(x)F_a^n(y)$ 同属于区间 I_0 或者 I_1.由于 F_a 在 I_0 和 I_1 上都是单调的,所以 $\forall z\in[x,y]$ 都有 $F_a^n(z)\in I_0\cup I_1$.这意味着 $[x,y]\subset A$.而由 A 的构造不难看出,同 Cantor 三分集一样,A 是不断地把 $[0,1]$ 剩下来的区间分成三部分,去掉中间开区间的部分而得到的,即 A 不可能含有区间,矛盾.所以 $T(x)\neq T(y)$.

其次,我们证明 $T(A)=\Sigma$.对任一闭区间 $J\subset[0,1]$,如图 6.3.1 所示,$F_a^{-1}(J)$ 含有两个闭区间分别在 I_0 和 I_1 中.注意到这一点,我们任取 $s=(s_0s_1\cdots s_n\cdots)\in\Sigma$,且定义

$$\begin{aligned}I_{s_0s_1\cdots s_n}&=\{x\in[0,1]:x\in I_{s_0},F_a(x)\in I_{s_1},\cdots,F_a^n(x)\in I_{s_n}\}\\&=I_{s_0}\cap F_a^{-1}(I_{s_1})\cap\cdots\cap F_a^{-n}(I_{s_n}),\end{aligned}$$

由于 $I_{s_0}\cap F_a^{-1}(I_{s_1})$ 是单个闭区间,而 $I_{s_0s_1\cdots s_n}=I_{s_0}\cap F_a^{-1}(I_{s_1s_2\cdots s_n})$,由数学归纳法得 $I_{s_0s_1\cdots s_n}$ 依然是单个闭区间.注意到 $I_{s_0s_1\cdots s_n}\supset I_{s_0s_1\cdots s_ns_{n+1}}$,由闭区间套定理,必存在 $x\in\bigcap\limits_{n\geqslant 0}I_{s_0s_1\cdots s_n}$,这也就是说,存在 $x\in A$,使得 $T(x)=(s_0s_1\cdots s_n\cdots)$.

最后,我们证明 T 的连续性.任取 $x\in A$,设 $T(x)=(s_0s_1\cdots s_n\cdots)$.任给 $\varepsilon>0$,取 n 充分大使得 $1/2^n<\varepsilon$.由于 F_a 在 $[0,1]$ 上连续,所以存在 $\delta>0$,使得当 $|x-y|<\delta,y\in A$ 时有

$$|F_a^k(x)-F_a^k(y)|<\sqrt{1-4/a},k=0,1,\cdots,n,$$

这意味着 $F_a^k(x)$ 与 $F_a^k(y)(k=0,\cdots,n)$ 同属于 I_0 或者 I_1,从而可以写成

$$T(x)=(s_0s_1\cdots s_ns_{n+1}\cdots),T(y)=(s_0s_1\cdots s_nt_{n+1}\cdots),$$

由此得

$$d(T(x),T(y))\leqslant\frac{1}{2^n}<\varepsilon,\forall y\in A,|x-y|<\delta,$$

所以 T 是连续的.

当然,我们还容易证明 $T^{-1}:\Sigma\to A$ 也是连续的,所以 T 是同胚.证毕.

接下来我们看一看 F_a 与 σ 间的关系.任取 $x\in A$,按 T 的定义有

$$T(F_a(x))=(s_1s_2\cdots s_{n+1}\cdots)=\sigma(T(x)),$$

这也就是

$$F_a=T^{-1}\sigma T:A\to A,$$

$$\sigma=TF_aT^{-1}:\Sigma\to\Sigma,$$

所以 $F_a|_A$ 与 σ 是拓扑等价的,这意味着这两个映射在本质上是一样的.$F_a|_A$ 的研究完全可以转化为左移映射 σ 的研究.而 σ 是如此简单明了,使得我们能把它的各种轨道都看得非常清楚,例如 σ 的不动点为

$$(000\cdots)和(111\cdots),$$

σ 的周期 2 轨道为

$$\{(010101\cdots),(101010\cdots)\},$$

σ 的周期 3 轨道为

$$\{(001001\cdots),(010010\cdots),(100100\cdots)\}\text{和}\{(110110\cdots),(101101\cdots),(011011\cdots)\},$$

这也就是说,映射 σ^3 有 8 个不动点:$(000\cdots)$,$(111\cdots)$,$(001001\cdots)$,$(010010\cdots)$,$(100100\cdots)$ $(110110\cdots)$,$(101101\cdots)$ 和 $(011011\cdots)$.

一般地,映射 σ^n 有 2^n 个不动点:

$$(s_0s_1\cdots s_{n-1}s_0s_1\cdots s_{n-1}\cdots),s_i\in\{0,1\},i=0,\cdots,n-1.$$

不难看到 σ 的周期轨道的全体组成的集合在 Σ 中稠密,因为任取 $s=(s_0s_1\cdots s_ns_{n+1}\cdots)\in\Sigma$,有周期点 $p_n=(s_0s_1\cdots s_ns_0s_1\cdots s_n\cdots)$,使得

$$p_n\to s,n\to\infty.$$

现在证明 Σ 关于 σ 是拓扑可传的.若取 $s\in\Sigma$ 如下:

$$s=(\overbrace{01}^{\text{所有的}s_0}\ \underbrace{00110110}_{\text{所有的}s_0s_1}\cdots\underbrace{\overbrace{0\cdots0}^{n+1}\cdots s_0s_1\cdots s_n\cdots\overbrace{1\cdots1}^{n+1}}_{\text{所有的}s_0s_1\cdots s_n}\cdots),$$

则对任意 $t=(s_0s_1\cdots s_ns_{n+1}\cdots)\in\Sigma$,必存在 k 使得 $\sigma^k(s)=(s_0\cdots s_n\cdots)$,从而得到

$$d(\sigma^k(s),t)\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

由于 n 可以事先取得任意大以及 t 的任意性,可知以 s 为初值的轨道在 Σ 中稠密,因此 Σ 关于 σ 是拓扑可传的.

下面我们还将看到 σ 在 Σ 上关于初值有敏感的依赖性.事实上,任取 $s,t\in\Sigma,s\neq t$,设 $s=(s_0\cdots s_n\cdots),t=(t_0\cdots t_n\cdots)$,则存在 n 使得 $s_n\neq t_n$,从而由

$$\sigma^n(s)=(s_ns_{n+1}\cdots),\sigma^n(t)=(t_nt_{n+1}\cdots)$$

可得

$$d(\sigma^n(s),\sigma^n(t))\geqslant|t_n-s_n|=1.$$

综上,Σ 是 σ 的混沌不变集.

注意到 $F_\alpha|_A$ 与 σ 拓扑等价,由上面所述,我们实际上已经证明如下的定理.

定理 6.3.2　设 $\alpha>4$,则 A 是 F_α 的混沌不变集,F_α 的所有周期点组成的集在 A 中稠密,且 A 关于 F_α 是拓扑可传的.

最后,我们注意到在定理 6.3.1 的证明中,若用 Cantor 三分集代替其中的 A,且用函数 $f(x)=\frac{3}{2}-3|x-\frac{1}{2}|$ 代替 F_α,则同样有 Cantor 三分集与 Σ 同胚,从而有下述定理.

定理 6.3.3　Cantor 三分集与 A 同胚.

按照广义的说法,把同 Cantor 三分集同胚的集合都称之为 Cantor 集,所以我们可以称 A 为 Cantor 集.

6.4　Smale 马蹄和双边符号动力系统

在 6.2 和 6.3 中,我们介绍了逻辑斯蒂映射的混沌性态.其实逻辑斯蒂映射也就是以抛物线作为图像的一维映射,它的本质是其图像中出现了一个峰.而抛物线并不是本质的,人们往往能在单峰映射中找到与逻辑斯蒂映射几乎一样的混沌性态,现在我们将 6.3 的思想运用到二维映射中,对一类充分"陡"的二维映射利用符号动力系统来寻找其各种混沌性态,来刻画其

混沌不变集.这个不变集就是我们下面讲到的Smale马蹄.从历史上看Smale马蹄早在人们认识逻辑斯蒂映射之前就出现了(见[45]),它在混沌理论的发展中起了至关重要的作用.

下面给出Smale马蹄的构造.

令 $S=[0,1]\times[0,1]\subset\mathbf{R}^2$,定义映射 $F:S\to\mathbf{R}^2$,如图6.4.1所示,F 在两水平带 H_0 和 H_1 上是线性的,它们的像分别为二铅垂带 V_0 和 V_1. $F(S)$就是图6.4.1(a)中的宽度为 λ 的马蹄.由图中可见 F 满足条件

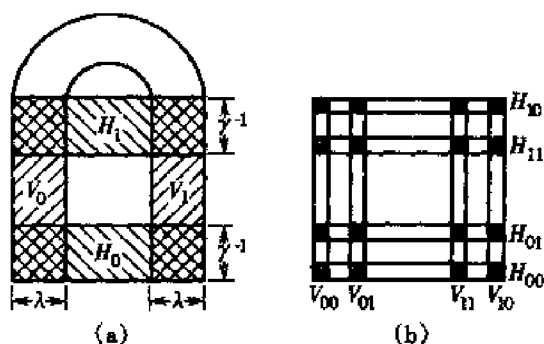


图6.4.1 Smale马蹄的构造

$$DF(x)\Big|_{x\in H_0}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \gamma\end{bmatrix},\ DF(x)\Big|_{x\in H_1}=\begin{bmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -\gamma\end{bmatrix},$$

其中 $0<2\lambda<1<\gamma/2$,即 F 在水平方向把H_k 压缩λ 倍,而在铅垂方向则把 H_k 拉长γ 倍.

定义Smale马蹄:

$$A=\bigcap_{n=-\infty}^{\infty}F^n(s)\ (F^0(S)=S),$$

显然,A 是F 和F^{-1}的不变集,从而 F^k 和F^{-k}都是A 上的动力系统,且 F 在A 上生成双边的动力系统(注意逻辑斯蒂映射是不可逆的,所以不可能生成双边的动力系统).

由于 $F^{-1}(S)\cap S=H_0\cup H_1$ 以及 $S\cap F(S)=V_0\cup V_1$,$F^{-1}(S)\cap S\cap F(S)$是四个高为γ^{-1},宽为 λ 的矩形之并.类似地,$\bigcap_{n=-k}^{k}F^n(S)$是4^k 个高为γ^{-k},宽为 λ^k 的矩形之并.从而 A 是一个 $\mathbf{R}^2$ 中的紧的、完全的、完全不连通的子集.利用下面的定理6.4.1就得出:A 是Cantor集.

定理6.4.1(Hocking-Young[27]) 任何紧的、完全的、完全不连通的距离空间都同胚于Cantor三分集.

同6.3中一样,我们将把 $F:A\to A$ 转化成左移映射$\sigma:\Sigma\to\Sigma$,其中

$$\Sigma=\{(\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n\cdots):s_k\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}\}.$$

通常称 $\sigma^k:\Sigma\to\Sigma(k\in\mathbf{Z})$为双边符号动力系统.

由于 Σ 中序列是双向无限的,为了明确起见,我们定义

$$T(x)=(\cdots T_{-k}(x)\cdots T_{-1}(x)T_0(x)T_1(x)\cdots T_k(x)\cdots),x\in A,$$

其中 $T_j(x)=i$,若 $F^j(x)\in H_i(i=0,1,j\in\mathbf{Z})$.

另一方面,在 Σ 上定义距离

$$d(s,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{|s_k-t_k|}{2^{|k|}},$$

其中 $s=(\cdots s_{-k}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_k\cdots)$,$t=(\cdots t_{-k}\cdots t_{-1}t_0t_1\cdots t_k\cdots)\in\Sigma$,则 Σ 成为距离空间.同6.3中一样,$T:A\to\Sigma$ 是同胚,且有 $F(x)=T^{-1}\sigma T(x)$,$F^{-1}(x)=T^{-1}\sigma^{-1}T(x)$,即 F 与σ 拓扑等价,从而同6.3一样,双边动力系统 $F^k|_A(k\in\mathbf{Z})$完全可以看成是双边符号动力系统 $\sigma^k:\Sigma\to\Sigma(k\in\mathbf{Z})$.

容易看到,σ 的不动点为$(\cdots000\cdots)=(0)'$和$(\cdots111\cdots)=(1)'$,而$(01)'$、$(001)'$、$(110)'$、

(0001)'、(1110)'、(1100)'和(1010)'分别是周期 2、3、3、4、4、4、4 点(这里( )'表示对括号中的符号进行周期延拓而得的符号列). 进一步,我们还可以看到,双向系统 $\sigma^k(k\in\mathbf{Z})$所有以下列类型的点为初值的轨道是同宿轨道:

$$(\cdots 00s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n00\cdots),(\cdots 11s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n11\cdots),$$

这里 $n\in\mathbf{Z}_+$, $s_k\in\{0,1\}$, $k=-n,\cdots,n$.

我们还可以看到 Σ 关于 σ 是拓扑可传的,因为令

$$s=(\cdots \overbrace{0\ 01}^{\text{所有的}s_0}\underbrace{00\,0\ 100\ 010\ 001\ 110\ 101\ 011\ 111}_{\text{所有的}s_{-1}s_0s_1}\cdots\underbrace{\overbrace{0\cdots0}^{2n+1}\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n\cdots\overbrace{1\cdots1}^{2n+1}}_{\text{所有的}s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n}\cdots)$$

同 6.3 中完全一样,单向轨道$\{\sigma^k(s):k\geqslant0\}$在 Σ 中稠密.

显然,Σ 的所有周期点组成的集合在 Σ 中稠密.

最后,我们还将看到 Σ 是混沌集,即 σ 在 Σ 上关于初值有着敏感的依赖性. 事实上,$\forall s=(\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n\cdots)\in\Sigma$ 及 $\delta>0$, Σ 中以 s 为中心以 δ 为半径的开球为

$$B(s;\delta)=\{t\in\Sigma:d(s,t)<\delta\},$$

取 n 充分大使得 $1/2^n<\delta$, 并取 $t=(\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_{n-1}t_ns_{n+1}\cdots)$, 即 t 与 s 仅在第 n 个符号处不相同,则

$$d(s,t)=|s_n-t_n|/2^n=1/2n<\delta,$$

故得 $t\in B(s;\delta)$. 但 $d(\sigma^n(t),\sigma^n(s))=|s_n-t_n|=1$,所以说 Σ 是 σ 的混沌不变集.

综上所述,我们得出如下定理.

定理 6.4.2　符号动力系统 $\sigma^k:\Sigma\to\Sigma$ 具有下列性质:

(1)Σ 中含有可数无限个周期轨道,对于每一 $k\geqslant1$,周期 k 轨道的个数大约为 $2^k/k$;

(2)Σ 中所有周期点所组成的集合在 Σ 中稠密;

(3)Σ 中含有无限不可数个非周期轨道;

(4)Σ 是 σ 的混沌不变集;

(5)Σ 关于 σ 是拓扑可传的.

由于 F 与 σ 拓扑等价,把定理 6.4.2 的 σ 和 Σ 分别换成 F 和 A 时,结论依然成立,更确切地说,有下述定理.

定理 6.4.3　Smale 马蹄映射 $F:A\to A$ 具有下列性质:

(1)A 中含有可数无限个周期轨道,对于每一 $k\geqslant1$,周期 k 轨道的个数大约为 $2^k/k$;

(2)A 中所有周期点组成的集合在 A 中稠密;

(3)A 中含有无限不可数个非周期轨道;

(4)A 是动力系统 $\sigma^k(k\geqslant0)$的混沌不变集;

(5)A 关于动力系统 $\sigma^k(k\geqslant0)$是拓扑可传的.

值得注意的是 Smale 马蹄映射 F 仅是一种人为的非常特殊的映射. 重要的是,F 在 A 的邻近是结构稳定的,即若 F 经 C^1 小扰动后为 $\widetilde{F}$,则必有 F 与 $\widetilde{F}$ 在 A 邻近拓扑等价,从而 $\widetilde{F}$ 也有一个混沌不变集 $\widetilde{A}$,这时我们也称 A 与 $\widetilde{A}$ 拓扑等价. 实际上 F 在 H_0 和 H_1 上的线性性质并不是必要的.

一般来说,对于映射 $P:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$,如图 6.4.2,若 P 具有一鞍点 p,且点 p 的稳定流形

$W^s(p)$和不稳定流形 $W^u(p)$在 q 点横截相交(即相交而不相切)，这时以 q 为初值的两轨道 $\{p^k(q)\}_{k\geq0}$和$\{p^{-k}(q)\}_{k\geq0}$恰好组成点 p 的同宿轨道而称q 为和p 相应的横截同宿点，则容易找到一带形区域 S 和$N\geq1$，使得 $P^N: S\to\mathbf{R}^2$ 具有如图 6.4.2 所示的形式. 这里 $P^N(S)$虽然与前面的 Smale 马蹄不尽相同，但本质上是一样的，关键是使 $P^N(S)$与 S 相交成如图所示的马蹄.

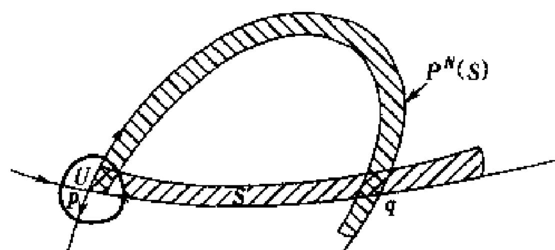


图 6.4.2

下面介绍本节的主要定理.

定理 6.4.4(Smale-Birkhoff 同宿定理)　设 $P:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是连续可微的同胚映射，具有鞍点 p 以及和 p 相应的横截同宿点 q，则 P 有一个混沌不变集 A，且存在 $n>0$，使得 $P^n: A\to A$ 与左移映射 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ 拓扑等价.

由此定理可见定理 6.4.3 对 $P^n|_A$ 依然成立. 事实上 P^n 在 A 的邻域上关于初值具有敏感的依赖性，也就是说 $P:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 生成 $\mathbf{R}^2$ 上的一个混沌的动力系统. 值得注意的是，定理 6.4.4 中 $\mathbf{R}^2$ 换成任意 k 维空间 $\mathbf{R}^k$ $(k>2)$时，相应的结论仍然成立(见 [46]).

6.5　Hénon 映射

在上一节中 Smale 马蹄映射 $F:S\to F(S)$具有混沌不变集，但这个集合不一定是吸引的. 在这里，我们希望给出映射 F，把 S 映射到 S 的内部，使得原来的混沌不变集成为混沌吸引子. 这种映射与 6.2 中的逻辑斯蒂映射是非常相像的.

天文学家 Hénon 从研究球状星团中，以及从 Lorenz 吸引子中得到启发给出了下列 Hénon 映射(见 [26])：

$$F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\ F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+1-ax^2\\bx\end{pmatrix},\ b=0.3,\ a=1.4.$$

这个映射的非线性部分来自于逻辑斯蒂映射，而且若把 F 关于 x 轴的分量 $F_1(x,y)=y+1-ax^2$ 限制在 x 轴上，则得逻辑斯蒂映射 $f_a(x)=1-ax^2$. 另一方面，也可以把 F 看成下列映射的迭加：

$$T':\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\ T'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y+1-ax^2\end{pmatrix},$$

$$T'':\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\ T''\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bx\\y\end{pmatrix},$$

$$T''':\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\ T'''\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}.$$

所以 $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T'''\circ T''\circ T'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，其中 T',T'',T'''的作用如下图.

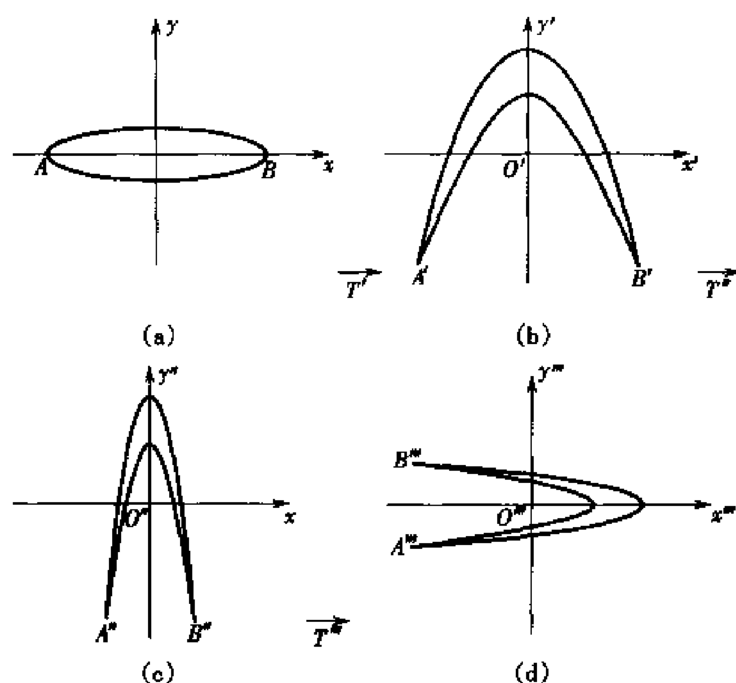


图6.5.1

注意到 F 的 Jacobi 行列式为

$$\det DF\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}-2ax & 1\\ b & 0\end{vmatrix}=-b=-0.3,$$

$F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是一一映射，但 F 是收缩面积的映射. 例如，设图 6.5.1(a)中的椭圆为 S，则(d)中 $F(S)$的面积是 S 的 0.3 倍.

在[26]中，Hénon 分别取两个初始点$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.631\ 354\ 48\\0.189\ 406\ 34\end{pmatrix}$，并利用计算机，分别求出了两轨道$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=F^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$的前 10 000 个点($n<10\ 000$). 把这些点(去掉初始若干个)在坐标系中表示出来，就得出如下两幅几乎没有任何区别的图(图 6.5.2 和图 6.5.3). 由此我们可以猜想到系统 F^k 应该有一个吸引集 A，它的几何形状同图中的轨道$\left\{\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=F^n\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}:n\geqslant 0\right\}$非常接近，在图中几乎无法区分. 事实上，吸引集 A 包含于由$(x_0,y_0)=(0,0)$出发的轨道的闭包，这也就是说 A 是拓扑可传的.

我们还可以发现存在着一个开集 $U\supset A$(如图 6.5.4)，使得任何以 U 中点为初值的轨道最终必被 A 所吸引，所以称 A 是吸引子(见[12]). 注意到 A 是由 U 收缩而成，例如 $F(U)$的面积是 U 的面积的 0.3 倍，所以 A 的二维 Lebesgue 测度为零. 由图 6.5.4 还可见 $A=\bigcap_{k\geqslant 0}F^k(U)$.

进一步，若把图 6.5.3 中落在小框内的轨道$\left\{\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=F^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}:n\leqslant 10^5\right\}$放大数倍，则得图 6.5.5.

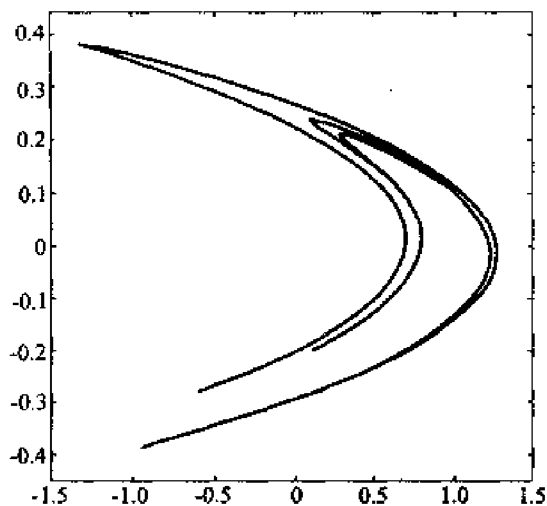


图 6.5.2　$x_0=0, y_0=0$

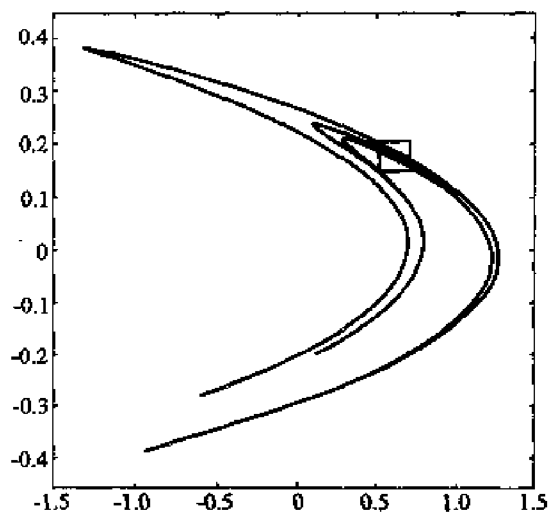


图 6.5.3　$x_0=0.631\,354\,48, y_0=0.189\,406\,34$

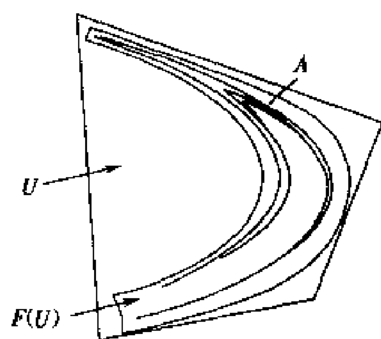


图 6.5.4

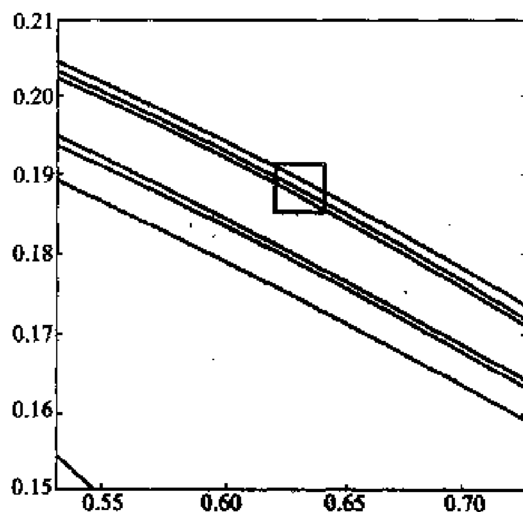


图 6.5.5

同样，把图 6.5.5 中位于小框内的轨道 $\left\{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = F^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} : n \leqslant 10\right\}$ 放大数倍，则得图 6.5.6.

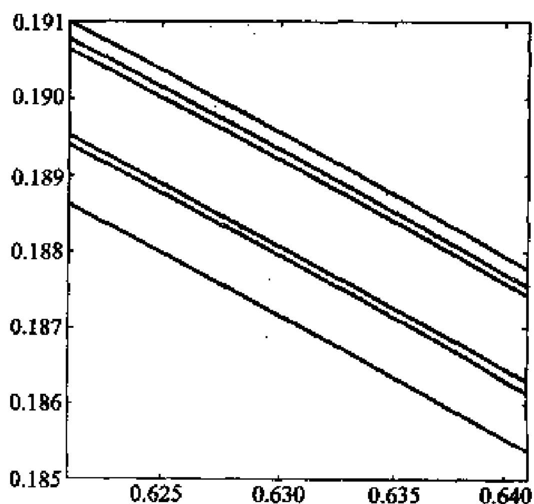


图 6.5.6

由此可见，若与 x 轴平行的直线簇与 A 相交而不相切，那么，所有这些交点所组成的集合必是一个 Cantor 集，从而吸引子 A 中所有位于图 6.5.3 的小方框内的点组成之集是一簇 Cantor 线段，该集虽含不可数条互不相交的线段，但其二维勒贝格测度却为零. 因此根据下一章的论述，可知 A 是一个分形集，从而 A 是动力系统 F^k 的奇怪吸引子.

第7章　分形

从前面可看到，一些非线性动力系统的奇怪吸引子在空间几何结构上非常复杂，但又呈现出一定的特征，这就是它们具有无穷嵌套的自相似性.

在自然界中具有自相似性的现象十分普通，例如多孔材料结构、雪花的图案、闪电的树状径迹、蜿蜒曲折的海岸线或云团的边缘. 人们从这类既具有复杂的无规则性又含有一定意义的自相似性的几何对象，提出了分形的概念并进行深入的研究. 分形(Fractal)这个词最早出现于分形几何奠基人 Benoit Mandelbrot1975 年的著作中.

在数学上，早期的分形是 19 世纪下半叶的处处连续且处处不可微的 Weierstrass 函数的图像以及 20 世纪初的 Cantor 三分集. 因此，早在 Mandelbrot 之前，分形就已出现. 不过早期的分形仅作为举例之用，人们并没有认识到它们与各种自然现象的内在联系. Mandelbrot 的功绩在于利用其在计算机方面的知识把各种分形绘成一幅幅生动的图像，另一方面又利用其在自然科学方面的洞察力，把自然界的许多令人困惑且杂乱无章的现象转化为分形模型而统一在分形几何的框架之中，从而为人们把握自然界的许许多多复杂结构和形态带来希望.

什么是分形，这自然是一个基本的问题，遗憾的是到目前为止还没有一个关于分形的完善定义. 可以说，对于分形的定义似乎意会比言传更合适. 容易想象，在某种意义下，飘浮的云彩、汹涌的波涛、起伏的山峦以及许多材料的断裂面都可以看成分形. 常见的分形往往有某种自相似性，如海岸线的自相性可以按 Mandelbrot 的下面这段话来理解："……在一张比例尺为1/100 000的地图上观察时，无数更小的海湾和更小的半岛变得清晰可见了. 在一张比例尺为1/1 000的地图上观察时，更小更小的海湾和半岛又出现了……". 又如星云，一张放大了的星团的照片显示出还有更小的星团. 把握分形的最重要的手段是计算分形的各种维数. 在此我们将介绍四种维数：拓扑维数、Hausdorff 维数、盒维数和相似维数以及它们间的关系，而把关于分形定义的讨论放在本章的最后一节.

7.1　Hausdorff 测度

我们已经介绍过 Lebesgue 测度，它是通常的长度、面积和体积等概念的延伸，它使得我们能对一些比较乱的集合进行度量，如一维集的长度、二维集的面积和三维集的体积. 但 Mandelbrot 的理论使人们意识到我们所处的世界中还有许多集合其维数并非恰好是整数. 过去人们在处理这类集合时常把它们的维数当成整数来看待，而使得所得的结果不甚理想. 如海岸线常是非一维的，而过去常把它当成线来度量其长度，所得的结果误差很大，这就如同用长度单位去度量面积那样幼稚可笑. 所以我们有必要引进一种新的测度.

Hausdorff 测度是由 Hausdorff 于 1919 年提出，并由 Besicovitch 等进一步完善而得到的.

设 $A\subset\mathbf{R}^n$，记 $|A|$ 为 A 的直径 diam A. 对于数 $\delta>0$，可数集族 $\{U_i\}$ 称为集 A 的一个 δ 覆盖，若 $A\subset\sum\limits_{i=1}^{\infty}U_i$ 且 $|U_i|<\delta$.

设 $A\subset\mathbf{R}^n$，$s\geqslant 0$ 和 $\delta>0$，记

$$\mathcal{H}_\delta^s(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s:\{U_i\}\text{为 }A\text{ 的}\delta\text{ 覆盖}\right\},$$

注意到当 $\delta_1\geqslant\delta_2$ 时，若 $\{U_i\}$ 为 A 的 δ_2 覆盖，则 $\{U_i\}$ 为 A 的 δ_1 覆盖，故有 $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(A)\leqslant\mathcal{H}_{\delta_2}^s(A)$，从而我们定义 A 的 s 维 Hausdorff 测度为

$$\mathcal{H}^s(A)=\sup_{\delta>0}\mathcal{H}_\delta^s(A)=\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s(A).$$

下面让我们比较一下 n 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^n$ 与 n 维 Lebesgue 测度 μ^n. 注意到 $\mathbf{R}^n$ 中直径为 $2r$ 的最大集合是半径为 r 的球，从而，对于勒贝格可测集 $A\subset\mathbf{R}^n$，我们有

$$\mathcal{H}^n(A)=\sup_{\delta>0}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|B_i|^n:\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\supset A,\{B_i\}\text{是 }\mathbf{R}^n\text{ 中的直径小于}\delta\text{ 的一列球}\right\},$$

而 Lebesgue 测度就是物体的体积，我们又有

$$\mu^n(A)=\sup_{\delta>0}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{vol}(B_i):\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\supset A,\{B_i\}\text{是 }\mathbf{R}^n\text{ 中的直径小于}\delta\text{ 的一列球}\right\},$$

其中 $\operatorname{vol}(B_i)$ 表示球 B_i 的体积. 由于对 $\mathbf{R}^n$ 中的中心在 x、半径为 r 的球 $B(x;r)$ 有

$$\operatorname{vol}(B(x;r))=\operatorname{vol}(B(0;r))=\operatorname{vol}\left(B\left(0;\frac{1}{2}\right)\right)(2r)^n,$$

故

$$|B(x;r)|^n=(2r)^n=\operatorname{vol}(B(x;r))\Big/\operatorname{vol}\left(B\left(0;\frac{1}{2}\right)\right),$$

从而

$$\mathcal{H}^n(A)=\mu^n(A)\Big/\operatorname{vol}\left(B\left(0;\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{2^{n-1}n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi^n}}\mu^n(A),A\in\mathcal{L}^n,$$

其中 $\Gamma(x)$ 是 Γ 函数（$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt\,(\operatorname{Re}x>0)$）.

下面我们给出一个显而易见的性质.

定理 7.1.1 若 $s\geqslant 0$，且 $\lambda>0$，则 $\mathcal{H}^s(\lambda A)=\lambda^s\mathcal{H}^s(A)$. 这里 $\lambda A=\{\lambda x:x\in A\}$，即 A 按比例放大 λ 倍.

证明 若 $\{U_i\}$ 为 A 的一个 δ 覆盖，则 $\{\lambda U_i\}$ 为 λA 的一个 $\lambda\delta$ 覆盖. 所以对于任一 δ 覆盖 $\{U_i\}$，有

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda A)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda U_i|^s=\lambda^s\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s,$$

从而

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda A)\leqslant\lambda^s\mathcal{H}_\delta^s(A),$$

令 $\delta\to 0$ 得

$$\mathcal{H}^s(\lambda A)\leqslant\lambda^s\mathcal{H}^s(A).$$

在上式中用 A 代替 λA，λ 代替 $1/\lambda$，得

$$\mathcal{H}^s(\lambda A)\geqslant\lambda^s\mathcal{H}^s(A),$$

从而得到所需的等式. 证毕.

7.2 Hausdorff 维数和拓扑维数

对于二维正方形 $A=[0,1]\times[0,1]$,其体积 $\mu^3(A)=0$,其面积 $\mu^2(A)=1$,而其长度 $\mu^1(A)=\infty$. 其实对于 Hausdorff 测度而言也有同样的情形. 设 A 的 Hausdorff 测度 $0<\mathscr{H}^s(A)<\infty$,则对于 A 的任一 δ 覆盖 $\{U_i\}$ 和 $\varepsilon>0$,

$$\sum_i|U_i|^{s+\varepsilon}\leqslant\delta^{\varepsilon}\sum_i|U_i|^s,\ \sum_i|U_i|^s\leqslant\delta^{\varepsilon}\sum_i|U_i|^{s-\varepsilon},$$

对 $\{U_i\}$ 取下确界得

$$\delta^{-\varepsilon}\mathscr{H}_\delta^{s+\varepsilon}(A)\leqslant\mathscr{H}_\delta^s(A)\leqslant\delta^{\varepsilon}\mathscr{H}_\delta^{-\varepsilon}(A),$$

令 $\delta\to0$ 得

$$\mathscr{H}^{s+\varepsilon}(A)=0,\mathscr{H}^{s-\varepsilon}(A)=\infty,$$

这使我们定义集 A 的 Hausdorff 维数 $d_H(A)$ 为

$$d_H(A)=\inf\{s:\mathscr{H}^s(A)=0\}=\sup\{s:\mathscr{H}^s(A)=\infty\}.$$

在分形理论中还常会出现拓扑维数,给出其定义是必要的. 让我们先注意到这样一些简单的事实:对于一根长度为 L 的线段 A,若用长度小于 L 的开区间去盖,则需要两个这样的开区间;若是对于直径为 L 的二维圆盘,则需要三个直径小于 L 的开圆盘才能盖住;进一步地,至少需要四个直径小于 L 的开球才能盖住一个直径为 L 的球. 这使得我们给出如下概念.

对于 $A\subset\mathbf{R}^n$,k 称为 A 的拓扑维数,记为 $d_T(A)$,若 k 是满足下列条件的最小整数:$\forall\delta>0$,存在 $\mathbf{R}^n$ 中的开球列 $\{B_l\}$ 为 A 的 δ 覆盖,使得 $\{B_l\}$ 中任何 $k+2$ 个开球的交是空集.

下面给出几个拓扑维数的计算例子.

例 7.2.1 Cantor 三分集 A_0 的拓扑维数 $d_T(A_0)=0$. 事实上,注意到 $\mu^1(A_0)=0$,且 A_0 是闭集,则 $\forall\delta>0$,容易取得 A_0 的一个 δ 覆盖为互不相交的开区间列,故 $d_T(A_0)=0$.

例 7.2.2 Sierpinski 垫 S 的拓扑维数 $d_T(S)=1$. Sierpinski 垫是由一个初始边长为 r 的等边三角形反复去掉边长为原三角形的一半且顶点在原三角形各边的中点的开的三角形而得出的,其构造步骤如图 7.2.1.

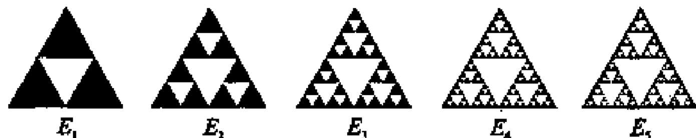


图 7.2.1 Sierpinski 垫的构造

注意到边长为 r 的等边三角形的外接圆的直径为 $\frac{2\sqrt{3}r}{3}$,所以经第一步后 E_1 所剩的 3 个三角形的外接圆的直径都是 $\frac{\sqrt{3}r}{3}\cdots$,第 k 步后 E_k 所剩的 3^k 个三角形外接圆的直径为 $\frac{\sqrt{3}r}{3\cdot2^{k-1}}$. 从而 $\forall\delta>0$,取 k 充分大使得 $\delta>\varepsilon+\frac{\sqrt{3}r}{3\cdot2^{k-1}}$,其中 ε 充分小,使得我们可以取直径为 $\varepsilon+\frac{\sqrt{3}r}{3\cdot2^{k-1}}$ 的 3^k 个开圆盘,分别盖住 E_k 中的 3^k 个等边三角形,且可调整位置使它们中的任何三

个开圆盘之交是空集,故有 $d_T(S)=1$.

例 7.2.3 Koch 曲线 K 的拓扑维数 $d_T(K)=1$. Koch 曲线的构造如图 7.2.2.

设 E_0 是单位长度的线段,E_1 是由 E_0 除去中间 1/3 等分线段而代之以底边在除去的线段上的等边三角形另外两边所得到的集.因此 E_1 由四条长度为 1/3 的线段组成,依次类推得 E_k 是把 E_{k-1} 的每条直线段中间 $1/3^k$ 长度为边的等边三角形另外两条边与原线段的两条边连接而成.因此,E_k 由 4^k 条长度为 $1/3^k$ 的线段连接成的.当 $k\to\infty$ 时,得极限 K 并称其为 Koch 曲线.

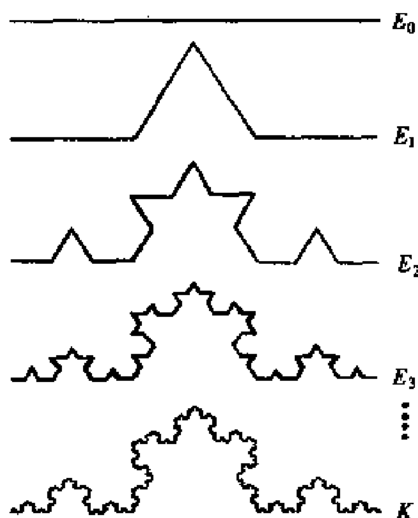


图 7.2.2 Koch 曲线的构造

对于 K 的拓扑维数可以如下求得,由于 E_k 的每一直线段的长度为 3^{-k},所以 $\forall\,\delta>0$,可以取 $\varepsilon>0$ 充分小且 k 充分大,使得 $\delta>\varepsilon+3^{-k}$,而使得 4^k 个直径为 $\varepsilon+3^{-k}$ 且圆心分别在每一线段中点的圆盘恰是 K 的一个 δ 覆盖.任何三个这样的圆盘交为空集,所以 $d_T(K)=1$.

7.3 盒维数

上一节所定义的 Hansdorff 维数是最重要的维数之一,但其计算是困难的.这是因为定义中所涉及的 δ 覆盖太多,为此我们去掉一些 δ 覆盖而只关心如下覆盖:对于 $A\subset\mathbf{R}^n$,令

$$V_\delta(A)=\{\{U_i\}:\bigcup_i U_i\supset A,|U_i|=\delta,\{U_i\}\text{是 }\mathbf{R}^n\text{ 中一列闭球}\},$$

则对于 $s\geqslant 0$,

$$\delta^s n_\delta(A)=\inf\left\{\sum_i|U_i|^s:\{U_i\}\in V_\delta(A)\right\},$$

其中 $n_\delta(A)$是 $\mathbf{R}^n$ 中直径为δ 且其并盖住A 的球的最小个数.由于 $\delta<\delta'$时 $V_\delta(A)$与 $V_{\delta'}(A)$间没有必然的包含或被包含关系,即当 $\delta\to 0^+$ 时,$\delta^s n_\delta(A)$的极限不一定存在,所以记

$$\overline{\mathscr{B}}^s(A)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\,\delta^s n_\delta(A),\ \underline{\mathscr{B}}^s(A)=\underline{\lim_{\delta\to 0}}\,\delta^s n_\delta(A),$$

(这里和以后,记号$\overline{\lim\limits_{\delta\to 0}}\,g(\delta)$和$\underline{\lim\limits_{\delta\to 0}}\,g(\delta)$分别表示量 $g(\delta)$在 $\delta\to 0^+$ 时的上极限和下极限,即 $\inf\limits_{\varepsilon>0}\sup\limits_{\delta\geqslant\varepsilon}g(\delta)$和$\sup\limits_{\varepsilon>0}\inf\limits_{\delta\geqslant\varepsilon}g(\delta)$)令

$$\overline{d}_B(A)=\inf\{s>0:\overline{\mathscr{B}}^s(A)=0\},\ \underline{d}_B(A)=\sup\{s:\underline{\mathscr{B}}^s(A)=\infty\},$$

并分别称它们为 A 的上盒维数和下盒维数.当 $\underline{d}_B(A)=\overline{d}_B(A)$时,称 $\underline{d}_B(A)$为 A 的盒维数,记其为 $d_B(A)$.

值得注意的是 $\underline{\mathscr{B}}^s(A)=\overline{\mathscr{B}}^s(A)$时,若记其为 $\mathscr{B}^s(A)$,则

$$d_B(A)=\sup\{s:\mathscr{B}^s(A)=\infty\}=\inf\{s:\mathscr{B}^s(A)=0\}.$$

从定义可见

$$d_H(A)\leqslant\underline{d}_B(A)\leqslant\overline{d}_B(A).$$

Mandelbrot[35]给出了关于盒维数的下列定理.

定理 7.3.1　当 A 的盒维数存在时,有

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\log n_\delta(A)}{\log\frac{1}{\delta}}=d_B(A).$$

证明　令 $\overline{d}=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\log n_\delta(A)/\log\frac{1}{\delta}$, $\underline{d}=\underline{\lim}_{\delta\to 0}\log n_\delta(A)/\log\frac{1}{\delta}$,则只需证明

$$\overline{d}=\underline{d}=d_B(A).$$

对于任意 $t<\overline{d}$ 以及 $t<s<\overline{d}$,有

$$s<\overline{\lim_{\delta\to 0}}\log n_\delta(A)/\log(1/\delta),$$

即存在趋于零的点列 $\{\delta_k\}$,使得

$$s<\log n_{\delta_k}(A)/\log(1/\delta_k),$$

从而

$$n_{\delta_k}(A)>\delta_k^{-s};$$

由此得

$$\overline{\mathscr{B}}^t(A)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\delta^t n_\delta(A)\geqslant\overline{\lim_{k\to 0}}\delta_k^t n_{\delta_k}(A)\geqslant\lim_{k\to 0}\delta_k^t\delta_k^{-s}=\infty,$$

这意味着

$$d_B(A)=\inf\{s:\overline{\mathscr{B}}^s(A)=0\}\geqslant\overline{d}.$$

另一方面,对于任意的 $t>\underline{d}$ 和 $\underline{d}<s<t$ 有

$$s>\underline{\lim}_{\delta\to 0}\log n_\delta(A)/\log(1/\delta),$$

由此可取点列 $\{\delta_k\}$, $\delta_k\to 0$,使得

$$s>\log n_{\delta_k}(A)/\log(1/\delta_k),$$

从而

$$n_{\delta_k}(A)<\delta_k^{-s},$$

$$\underline{\mathscr{B}}^t(A)=\underline{\lim}_{\delta\to 0}\delta^t n_\delta(A)\leqslant\underline{\lim}_{k\to\infty}\delta_k^t n_{\delta_k}(A)\leqslant\lim_{k\to\infty}\delta_k^t\delta_k^{-s}=0,$$

这又意味着

$$d_B(A)=\sup\{s:\underline{\mathscr{B}}^s(A)=\infty\}\leqslant\underline{d},$$

因此 $d_B(A)\leqslant\underline{d}\leqslant\overline{d}\leqslant d_B(A)$. 证毕.

盒维数有这样的重要性质,即集 A 的盒维数等于其闭包 $\overline{A}$ 的盒维数: $d_B(A)=d_B(\overline{A})$. 这是与 Housdorff 维数大相径庭之处,由此很容易找到集合 A 使得 $d_H(A)<d_B(A)$. 例如区间 $[0,1]$ 中的有理数集 A 是可数集,故 $d_H(A)=0$. 但

$$d_B(A)=d_B(\overline{A})=d_B([0,1])=1.$$

值得注意的是,对于有界集 $A\subset\mathbf{R}^n$,当 $n_\delta(A)$ 代表盖住 A 的以 δ 为边长之 n 维方体的最少个数时,相对应的 $d_B(A)$ 和 $\mathscr{B}^s(A)$ 等与上述所得却是一致的.

从定理 7.3.1 可见,当 $\lambda=\log\frac{1}{\delta}$ 充分大时,若记

$$f_A(\lambda)=\log n_\delta(A),$$

则

$$f_A(\lambda)\approx c+d_B(A)\lambda,$$

即 $f_A(\lambda)$ 近似于线性函数，求 $d_B(A)$ 即为求此函数所代表的直线的斜率，这是盒维数近似计算的理论依据.

下面，我们给出波线 W、Koch 曲线 K 和英国一部分海岸线 G 的图形，并把其分别置于格子边长为 $\delta=1/4,\cdots,1/32$ 的方格纸中，用 $n_\delta(A)(A=W,K,G)$ 近似地表示与图 A 相交的边长为 δ 的格子数，并把它们列成表 7.3.1.

表 7.3.1

δ	1/4	1/8	1/12	1/16	1/24	1/32
$n_\delta(W)$	11	34	51	68	100	135
$n_\delta(K)$	6	14	16	32	55	74
$n_\delta(G)$	16	48	84	122	194	283

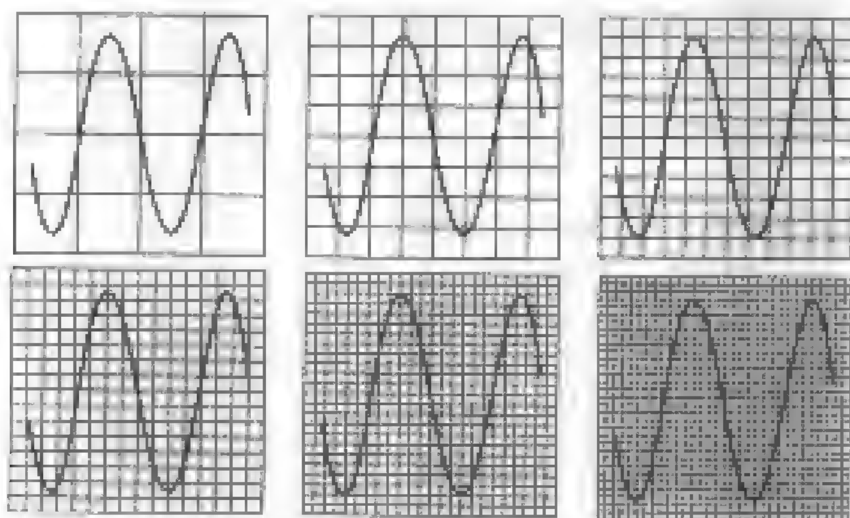


图 7.3.1 波线 W

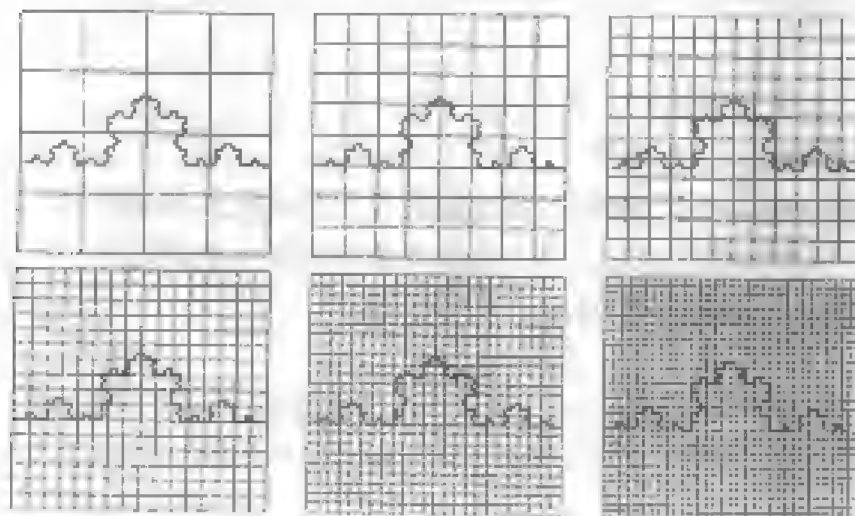


图 7.3.2 Koch 曲线 K

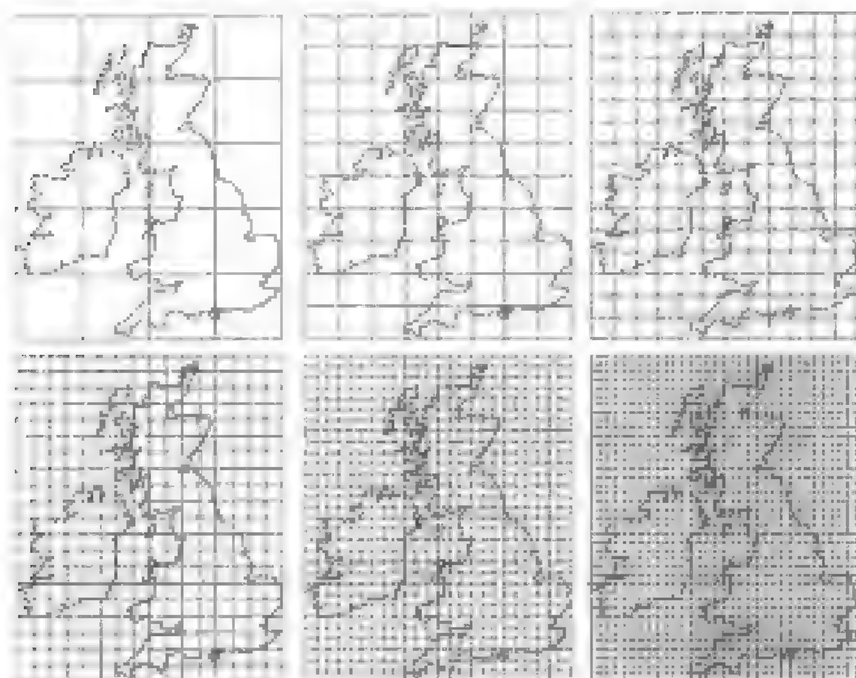


图 7.3.3　英国一部分海岸线 G

由于 $f_A(\lambda)\approx c+d_B(A)\lambda$，因此 $d_B(A)\approx\dfrac{f_A(\lambda_{k+1})-f_A(\lambda_k)}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}$. 由此图表可以求得 $d_B(A)$ $(A=W,K,G)$的近似值.

对照此表，不难想象，对于 $\lambda_k=\log\delta_k^{-1}$，$\delta_k=1/4,1/8,1/12,1/16,1/24,1/32,\cdots$，以及相应于波线 W 和 Koch 曲线 K 的函数 f_W 和 f_K 而言，当 k 充分大时，$(\lambda_k,f_W(\lambda_k))$和$(\lambda_k,f_K(\lambda_k))$应分别在斜率为 1 和 $\log 4/\log 3$ 的直线上，即可以近似地认为 $d_B(W)\approx 1$ 以及 $d_B(K)\approx\log 4/\log 3$. 对于 G 则很难找到一个精确的盒维数. 设 $f_G(\lambda)$是相应于 G 的函数，不难看到，$f_G(\lambda)$的斜率可以看成

$$\frac{\log 283-\log 194}{\log 32-\log 24}\approx\frac{2.45-2.29}{1.51-1.38}\approx 1.31,$$

即 G 的盒维数为

$$d_B(G)\approx 1.31.$$

7.4　相似维数

前面我们曾给出过一些非常特殊的集合，如 Cantor 三分集、Sierpinski 垫和 Koch 曲线等，这些集合都有这样一种共同的性质：其整体可以分成数个组成部分，而每一部分放大一个适当倍数，再经刚体运动后可同原整体重合. 通常我们把满足这一性质的集合称为严格自相似集. 如 Cantor 集可以分成两部分，每一部分是原集合缩小为三分之一而得到的，Koch 曲线 K 是四个 1/3 的 K 的并集，而 Sierpinski 垫则是四个由原集合缩小为二分之一而得的集合的并. 对于这样一些严格自相似集，应该有某种容易计算的维数，这就是相似维数，其定义与 δ 覆盖毫无关系.

我们先做一些准备.

令 $\mathscr{K}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中全体有界闭集的集合,映射 $d:\mathscr{K}\times\mathscr{K}\to\mathbf{R}$ 定义如下:记

$$d_1(x,A)=\inf\{|x-y|:y\in A\},A\in\mathscr{K},$$

而令 $$d(A,B)=\max\{\sup\{d_1(x,B):x\in A\},\sup\{d_1(y,A):y\in B\}\},A,B\in\mathscr{K},$$

则易见 d 是距离,称为 Hausdorff 距离,从而 $\mathscr{K}$ 是一个距离空间. 还可证明:$\mathscr{K}$ 关于 Hausdorff 距离是完备的(参见[14]).

定义 7.4.1 称 $S:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为相似映射,若 $\exists c\in(0,1)$,使得

$$|S(x)-S(y)|=c|x-y|,\forall x,y\in\mathbf{R}^n,$$

其中 c 称为 S 的压缩率.若干个相似映射 $S_1,\cdots,S_k$ 的并映射,记作 $\bigcup_{i=1}^k S_i$,定义为

$$(\bigcup_{i=1}^k S_i)(x)=\bigcup_{i=1}^k\{S_i(x)\},\forall x\in\mathbf{R}^n.$$

定理 7.4.1 设 $S_1,\cdots,S_k$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一组相似映射,则存在着唯一的紧集 $A\in\mathscr{K}$,使得 A 是 $S=\bigcup_{i=1}^k S_i$ 在 $\mathscr{K}$ 上的不动点,即

$$A=S(A)=\bigcup_{i=1}^k S_i(A),$$

且 $\forall$ 非空紧集 $B\in\mathscr{K}$ 有 $d(S^m(B),A)\to 0(m\to\infty)$.

证明 由压缩映射原理只需证明 S 作为 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{K}$ 的映射是压缩的.

设 $c_1,\cdots,c_k$ 分别是 $S_1,\cdots,S_k$ 的压缩率,则 $0<c_i<1$.任取 $A,B\in\mathscr{K}$,由 d 的定义

$$d(S(A),S(B))=\max\{\sup\{d_1(y,S(A)):y\in S(B)\},\sup\{d_1(x,S(B)):x\in S(A)\}\},$$

而对于 $x\in S(A),y\in S(B)$,有

$$\begin{aligned}d_1(y,S(A))&\leqslant\max_{j\leqslant k}\sup\{d_1(v,\bigcup_{i=1}^k S_i(A)):v\in S_j(B)\}\\&\leqslant\max_{j\leqslant k}\sup\{d_1(v,S_j(A)):v\in S_j(B)\},\end{aligned}$$

同样有

$$d_1(x,S(B))\leqslant\max_{j\leqslant k}\sup\{d_1(w,S_j(B)):w\in S_j(A)\},$$

从而

$$\begin{aligned}d(S(A),S(B))&\leqslant\max\{\max_{j\leqslant k}\sup\{d_1(v,S_j(A)):v\in S_j(B)\},\\&\qquad\max_{j\leqslant k}\sup\{d_1(w,S_j(B)):w\in S_j(A)\}\}\\&\leqslant\max_{j\leqslant k}d(S_j(A),S_j(B))\\&\leqslant\max_{j\leqslant k}c_jd(A,B),\end{aligned}$$

因此 S 是完备的距离空间 $\mathscr{K}$ 中的压缩映射,由压缩映射原理,S 有唯一不动点 A,且由压缩映射原理的证明可见,$\forall$ 紧集 $B\in\mathscr{K}$,有 $d(S^m(B),A)\to 0(m\to\infty)$.证毕.

根据此定理,我们可以给严格自相似集下一个严格且略为苛刻的数学定义.

定义 7.4.2 (1)称集 $A\subset\mathbf{R}^n$ 为严格自相似集,若 A 是紧集,且 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中某一组相似映射之并 $S=\bigcup_{i=1}^k S_i$(在 $\mathscr{K}$ 中)的不动点.

(2)设 $c_1,\cdots,c_k$ 分别是 $S_1,\cdots,S_k$ 的压缩率,则定义 A 的相似维数 $d_S(A)$ 为方程

$$\sum_{i=1}^{k} c_i^{\alpha} = 1$$

的解 α.

定理 7.4.1 还说明如何在给定相似映射 $S_1,\cdots,S_k$ 的情况下去寻求相应的严格自相似集. 事实上 $\forall A \in \mathscr{X}$, 当 $m \to \infty$ 时, m 次迭代 $S^m(A)$(这里 $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$)就可逼近所要求的严格自相似集. 由此可见, 我们可以借助于计算机来求得这种集合.

值得注意, 一个严格自相似集可能同时是数组相似映射之并的不动点, 但所得到的相似维数是唯一的.

下面我们回忆一下前面所提到过的几个集合.

Cantor 三分集 A_0 是两个相似映射 $S_1(x) = x/3$, $S_2(x) = (x+2)/3$ 的并映射的不动点, 即 $A_0 = S_1(A_0) \cup S_2(A_0)$, 而 S_1 与 S_2 的压缩率都是 1/3, 所以 Cantor 集的相似维数为 $d_S(A_0) = \log 3/\log 2$, 它是方程 $2\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha} = 1$ 的解.

Sierpinski 垫 S 是三个压缩率都为 $\frac{1}{2}$ 的相似映射 S_1, S_2, S_3 之并的不动点, 即 $S = S_1(S) \cup S_2(S) \cup S_3(S)$, 当 $\alpha = \log 3/\log 2$ 时有 $3\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha} = 1$, 所以 $d_s(S) = \log 3/\log 2$.

Koch 曲线 K 是四个相似映射 S_1, S_2, S_3, S_4 之并的不动点, 即 $K = S_1(K) \cup S_2(K) \cup S_3(K) \cup S_4(K)$, 而每一个 S_i 的压缩率都是 $\frac{1}{3}$, 且 $\alpha = \log 4/\log 3$ 满足方程 $4\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha} = 1$, 所以 K 的相似维数为 $d_s(K) = \log 4/\log 3$.

值得指出, 线段、正方形和立方体都是严格自相似集, 它们的相似维数分别为 1、2、3, 就是它们的拓扑维数.

下面我们举一个相当奇怪的例子, 它是平面图形, 但其相似维数大于 2.

根据图 7.4.1 构造得到一个严格自相似集 A. 易见 A 是由 13 个压缩率同为 1/3 的相似映射 $S_1, S_2, \cdots, S_{13}$ 而得, 即 $A = S_1(A) \cup \cdots \cup S_{13}(A)$. 由于 $\alpha = \log 13/\log 3$ 是方程 $4\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha} = 1$ 的解, 故 A 的相似维数为 $d_s(A) = \log 13/\log 3 \approx 2.335$.

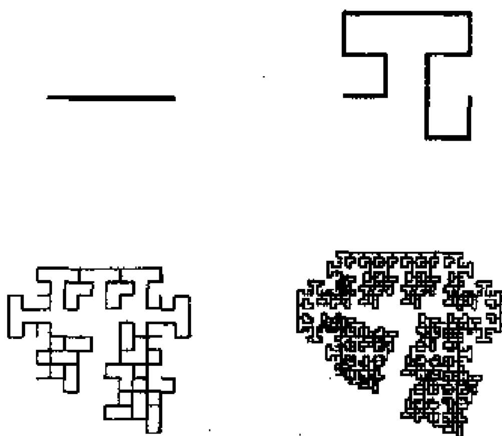


图 7.4.1

在集合 A 的构造中可见, 在第二步开始, 图形已开始重叠, 而计算相似维数时是把重叠的部分重复计算在内的, 这就导致这个平面图形的相似维数大于 2.

7.5　分形维数间的关系

在 7.3 中,我们已经知道 $d_H(A)\leqslant d_B(A)$,且存在集合 A 使得 $d_H(A)<d_B(A)$.但是严格自相似集的各种维数却有下列关系(参见[15]).

定理 7.5.1　设 $S_1,\cdots,S_k$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的相似映射,$A\subset\mathbf{R}^n$ 是紧集,且是 $S=\bigcup_{i=1}^{k}S_i$ 的不动点,即 A 是严格自相似集.则

(1)$d_H(A)=d_B(A)$;

(2)若$\{S_1,\cdots,S_k\}$满足下列开集条件:∃有界非空开集 $V\subset\mathbf{R}^n$,使得

$$S_i(V)\cap S_j(V)=\varnothing,i\neq j,\sum_{i=1}^{k}S_i(V)\subset V,$$

那么必然有

$$d_H(A)=d_B(A)=d_S(A).$$

此定理是重要的,因为它减小了求严格自相似集的 Hausdorff 维数的困难.若开集条件不满足,则有

$$d_H(A)=d_B(A)\leqslant d_S(A).$$

若 A 是如图 7.4.1 所构造的图,则有

$$d_H(A)=d_B(A)\leqslant 2<d_S(A)=\log 13/\log 3.$$

值得注意的是,应用此定理,关键在于验证开集条件.Cantor 三分集的开集条件是显而易见的,即 $V=(0,1)$,而 $S_1(V)=(0,1/3)$,$S_2(V)=(2/3,1)$,$S_1(V)\cup S_2(V)\subset V$,所以 Cantor 三分集的 Hausdorff 维数和盒维数都是 log 3/log 2.

Sierpinski 垫 S 满足开集条件也是易见的.取 V 为E_0 的内部(见图 7.2.1),则 $S_1(V)$,$S_2(V)$,$S_3(V)$分别是 E_1 的三个黑三角形的内部,从而有 $d_H(S)=d_B(S)=\log 3/\log 2$.

Koch 曲线满足开集条件并不是直接可以看到的.如图 7.5.1,取 V 为以 E_0 为底边的等边三角形的内部,则$S_1(V)$,$S_2(V)$,$S_3(V)$和 $S_4(V)$分别是以 E_1 的四条直线段为底边的等边三角形的内部.从而有 $S_1(V)\cup S_2(V)\cup S_3(V)\cup S_4(V)\subset V$,且 $S_i(V)$互不相交.故 Koch 曲线的 Hausdorff 维数和盒维数都是log 4/log 3.

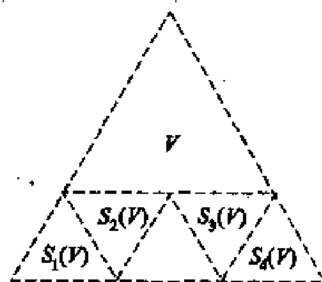


图 7.5.1

7.6　什么是分形

Mandelbrot 于 1975 年首先给出了分形的定义:一个集合称之为分形,若其 Hausdorff 维数大于拓扑维数.因此,Cantor 三分集、Koch 曲线和 Sierpinski 垫都是分形.但这个定义却排除了其他许多明显是分形的集合,如复平面 $\mathbf{C}$ 上的 Mandelbrot 集 M(见[36]).关于 M 的进一步放大的各种图可见于[19].实际上,把 M 的边界点邻近放大足够倍数就可见一个与M 本身完

全一样的集合.所以 M 是分形,但 M 的 Hausdorff 维数与其拓扑维数是相等的.

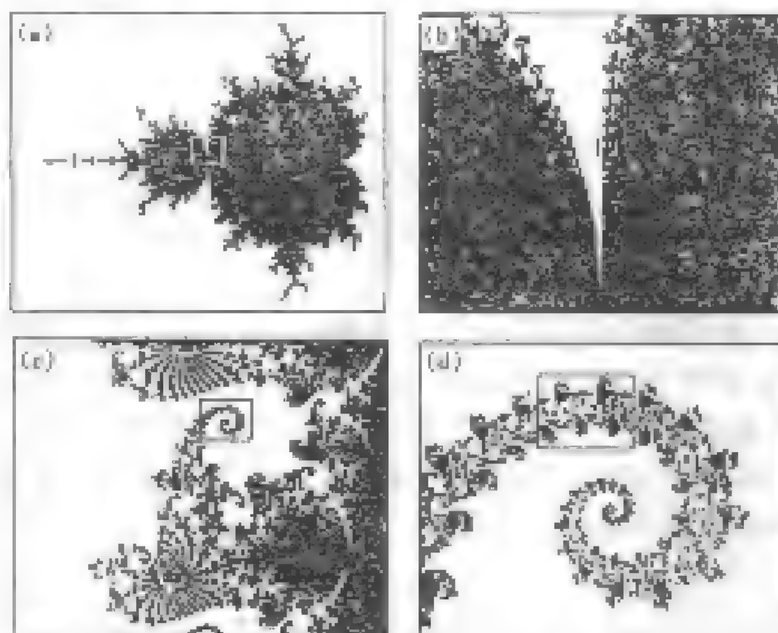


图 7.6.1　复平面上的 Mandelbrot 集及其局部放大

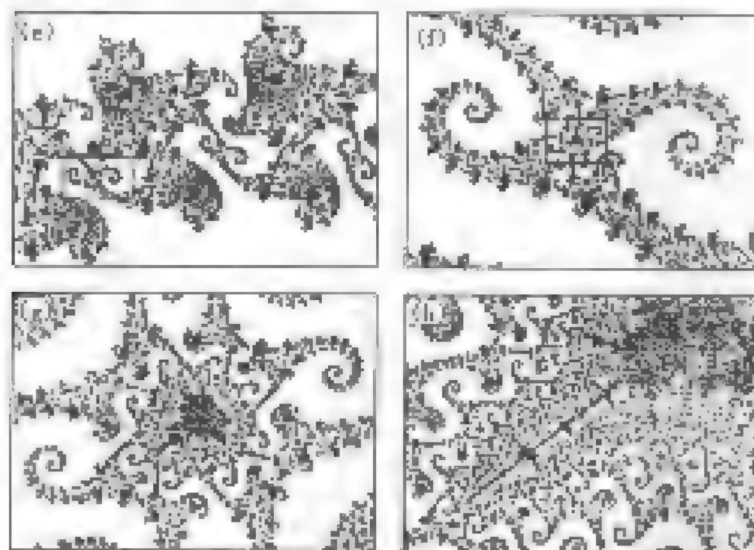


图 7.6.2　复平面上的 Mandelbrot 集的局部放大

在文献[17]中,Feder 曾做这样的定义:一个集合称为分形,若其整体与其组成部分具有某种自相似性.他还指出这个定义是在与 Mandelbrot 的私人通信中得出的.值得注意的是,直线段、正方形、正方体都是严格自相似集,按照以上定义,它们都应是分形.因为尽管这里的"某种自相似性"可以多方面去理解,但它至少应包含严格的自相似性.所以,这第二种定义也是不尽合理的.而且在近年来的各种文献中,特别是近两年出现的大量关于分形的论著中,人们几乎都没有采用这第二种定义.人们最关心的分形,或者说狭义的分形,仍然是指第一个定义中的分形.

现在人们已逐渐发现,给分形下一个精确的数学定义是不现实的,因为这种定义不是排除

掉一些有兴趣的情形,就是把一些明显不是分形的情形也包含了进来.事实上,是分形和不是分形的两种情形之间并没有很明显的界线.所以,我们还是认同 Falconer[15]所持的观点,给分形下一个如下的“定义”.

一个集合 A 称为分形,若 A 满足下面所列的某些性质:

(1)A 具有精细的结构,即有任意小比例的细节;

(2)A 是如此的不规则,以至它的整体和局部都不能用传统的几何语言来描述;

(3)A 通常有某种自相似的形式,可能是近似的或是统计的;

(4)A 的某种分形维数大于其拓扑维数;

(5)在大多数令人感兴趣的情形下,A 以非常简单的方式定义,或由迭代产生.

值得注意的是,自然界中的分形都是在一定意义下而言的,它们都有别于数学中的分形.正如在自然界中不可能有真正的直线和圆一样,自然界中并无真正的分形.

以上所讲只是分形理论中最基本的部分.近年来,分形理论发展迅速,而且分形的理论和应用已经深入到了许多科技领域之中.

参 考 文 献

[1] Aharony A, Feder J. Fractals in Physics. Physica, 1989,38(1)

[2] Ahdronov A A, et al. Theory of Oscillators. Oxford:Pergamon Press, 1966

[3] Arnold V I. Instability of Dynamical Systems with Several Degrees of Freedom. Sov Math Dokl, 1964,5:581.

[4] Berger M. Nonlinearality and Functional Analysis. *New York*:Academic Press,1977

[5] Carr J. Applications of Center Manifold Theory. New York: Springer-Verlag, 1981

[6] 陈关荣.控制非线性动力系统的混沌现象. 控制理论与应用,1997,14(1)

[7] 陈文嫄.非线性泛函分析.兰州:甘肃人民出版社,1982

[8] 陈予恕,唐云等编.非线性动力学中的现代分析方法.北京:科学出版社, 1992

[9] Chow S N, Hale J. Methods of Bifurcation Theory. New York:Springer-Verlag,1982

[10] Collet P, Eckmann. J P. Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems. Boston:Birkhauser, 1980

[11] Devaney R L, Keen L. Chaos and Fractals. Amer Math Soc, Providence, 1989

[12] Eckmann J P, Ruelle D. Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. Rev Mod Phys, 1985,57:617

[13] Eden A, Foias C, Temam R. Local and Global Liapunov Exponents. J Dyn Diff Equs, 1991,3,133

[14] Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets. Cambridge: Cambridge University Press, 1985

[15] Falconer K J. Fractal Geometry. New York:Wiley, 1990

[16] 方锦清.混沌控制及其应用前景.科技导报, 5(71),1994

[17] Feder J. Fractals. New York:Plenum Press, 1988

[18] Feigenbaum M J. Quantitative University for a Class of Nonlinear Transformations. J Stat Phys, 1978,19:25

[19] Gleick J. Chaos. 1988(混沌学(郝柏林等译. 1990),混沌学(张彦等译,1991))

[20] Golubitsky M, Schaeffer D. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 1985

[21] 关肇直等.线性泛函分析入门.上海:上海科技出版社, 1979

[22] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York:Springer-Verlag., 1983

[23] 郭大钧.非线性泛函分析(第二版).济南:山东科学技术出版社,2001

[24] 郝柏林.分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他. 物理学进展, 1983,3:329

[25] Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York:Wiley, 1964

[26] Hénon M. A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor. Commun Math Phys,

1976,50:69

[27] Hocking J G, Young G S. Topology. Addison-Wesley: Reading, MA. 1961

[28] Holden A V. Chaos. Manchester:Manchester University Press, 1986

[29] Kaplan J, Yorke J A. Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations in Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points. New York: Springer-Verlag, 1979.

[30] Jacobson N. Lectures in Abstract Algebra, Van Nostrand, 1951,1(黄缘芳译, 抽象代数学,卷 1, 科学出版社, 1960)

[31] Li T Y, Yorke J A. Period Three Implies Chaos, Amer Math Monthly,1975,82:985

[32] Lorenz E N. Deterministic Non-Peridic Flow. J Atmos Sci,1963,20:130

[33] 陆启韶.常微分方程定性方法和分叉.北京:北京航空航天大学出版社,1989

[34] 陆启韶. 分岔与奇异性.上海:上海科技教育出版社,1995

[35] Mandelbrot B B. Fractals: Form, Chance and Dimension. San Francisco: W H Freeman, 1977

[36] Mandelbrot B B. Fractal Aspects of the Iteration of $z \to az(1-z)$ for Complex a, z. Ann N Y Acad Sci, 1980,357:249

[37] Marsden J E McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer-Verlag, 1976

[38] Melnikov V K. On the Stability of the Center for Time Periodic Perturbations. Trans Moscow Math Soc, 1963,12:1

[39] Moon F C, Holmes P J. A Magnetoelastic Strange Attractor. J Sound Vib,1979,65:2

[40] Peitgen H O, et al. Fractals for the Classroom: Strategic Activities. New York:Springer-Verlag, 1991

[41] Peitgen H O, et al. Fractals for the Classroom: Intrduction to Fractals and Chaos. New York:Springer-Verlag, 1992

[42] Poincare H. Sur les equations de la dynamique et le prebleme detrois corps. Acta Math, 1890,13:1

[43] Ruelle D Takens F. On the Nature of Turbulence. Commun Math Phys,1971,20:167

[44] Sarkovskii A N. Coexistence of Cycles of a Continuous Map of a Line Into itself. Ukr Math Z, 1964,16:61

[45] Smale S. Diffeomorphisms with Many Periodic Points, In Differential and Combinatorial Topology. Princeton: Princeton University Press, 1963

[46] Smale S. The Mathematics of Time. New York:Springer-Verlag, 1980

[47] Sparrow C. The Lorenz Equations. New York:Springer-Verlag, 1982

[48] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York:Springer-Verlag, 1988

[49] Ueda Y. Explosion of Strange Attractors Exhibited by Duffing's Equation. In Nonlinear Dynamics, New York: New York Academiy of Sciences, 1981

[50] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. New York:

Springer-Verlag, 1990
[51] 张锦炎,冯贝叶.常微分方程几何理论与分支问题.北京:北京大学出版社, 2000
[52] 郑伟谋,郝柏林.实用符号动力学,物理学进展,1990,10:316~373
[53] 郑维行,王声望.实变函数与泛函分析(上,下册).北京:人民教育出版社,1980